УДК 518.3 / 681.142.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

П. Н. Денисенко

Аннотация

We presented the procedure of the algebraic programming system APS. This procedure solve eigenvalue problem for linear integral operator. The coefficients of this operator is algebraic polinomials. We proved the efficient: this procedure, the algorithm of this procedure, the method of this procedure.

1. Задача

Дано. Задача на собственные значения для линейного интегрального оператора типа A_4, отрезок аппроксимации $[a,b]$ и $n \in N$.

$$INPUT \ := \ (\ (\ L[y] + g = \lambda \cdot y\ ) \ \in \ A_4\ ,\ \lambda = ?\ ,\ y = y(x) = ?\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \quad (1)$$

Необходимо. Построить процедуру 1 — $procedure\_1$ — системы APS [1] — системы алгебраического программирования.

Эта процедура преобразует вход (1) в алгебраический полином

$$OUTPUT \ := \ y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \quad (2)$$

Этот полином аппроксимирует главную собственную функцию $y(x)$ задачи (1).

Интегральное уравнение типа A_4 входа (1) линейное и имеет вид.

$$(\ L[y] + g = \lambda \cdot y\ ) \ =$$

$$(\ \int_{c_1(x)}^{d_1(x)} K_1(x,t) \cdot y(t) + \cdots + \int_{c_p(x)}^{d_p(x)} K_p(x,t) \cdot y(t)\, dt + g(x) \ = \lambda \cdot y(x)\ )\ . \quad (3)$$

Интегральное уравнение типа A_4 (3) имеет ядра $K_1(x,t), \ldots, K_p(x,t)$, пределы интегрирования $c_1(x), \ldots,\ c_p(x)$, $d_1(x), \ldots,\ d_p(x)$ и свободный член $g(x)$ — алгебраические многочлены — является ЛИУМК.

Главная собственная функция задачи (3) типа A_4 — решение нелинейного интегрального уравнения

$$solve(\ L[y] + g = (\ L[y] + g\ )|_{x=d} \cdot y\ ) = y(x)\ , \quad x \in [a,b]\ , \quad d = (a+b)/2. \quad (4)$$

Метод 1 ($method\_1$) — преобразования входа (1) в полином (2) (основание процедуры 1 — $procedure\_1$) **не имеет насыщения** в следующем смысле.

Для входа (1), где уравнение (3) принадлежит к представительному классу $A_{4,C_{[a,b]}} \subset A_4$,

$$INPUT \ := \ (\ L[y] + g = \lambda \cdot y \ \in \ A_{4,C_{[a,b]}}\ ,\ \lambda = ?\ ,\ y = y(x) = ?\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) \quad (1')$$

справедливы следующие (эквивалентные) **утверждения.**

1. В пространстве $C_{[a,b]}$ **норма погрешности метода 1** преобразования входа (1') в алгебраический полином y_n (2) — $OUTPUT \ := \ y_n$ (2) —

$$\|y - y_n\|_{C_{[a,b]}} \ = \ O(\inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}}) \ .$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности аппроксимации функции y (4) полиномом y_n (2) имеет (по n) тот же порядок, что и величина наилучшего приближения функции y (4) алгебраическими полиномами порядка n.

$$E_{n,C_{[a,b]}}[y] \ = \ \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}} \ . \tag{5}$$

2. Коэффициент оптимальности преобразования по методу 1 входа (1') в алгебраический полином y_n (2) — $OUTPUT \ := \ y_n$ (2) — в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен.

$$C_n(\ method\_1 \ , \ L[y] + g = \lambda \cdot y \ \in A_{4,C_{[a,b]}} \ , \ C_{[a,b]} \ ) \ =$$
$$\|y - y_n\|_{C_{[a,b]}} \ / \ E_{n,C_{[a,b]}}[y] \ = \ O(1) \ . \tag{6}$$

2. Актуальность задачи

Интегральные уравнения являются классическим аппаратом для создания математических моделей [2]. Исследование модели имеющей уравнение, обычно, требует решения этого уравнения.

ЛИУМК (3) используют в математических моделях достаточно часто [3]. Классической модельной задачей для вычисления собственных функций является задача о форме собственных колебаний струны.

СКА (системы компьютерной алгебры) Maple, Mathematica, Matlab, APS [1], Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

СКА не решают ЛИУМК типа A_4 аналитически.

Классическое требование СКА к операндам преобразуемым этой системой. *Число бит для записи операнда (в частности, полинома* y_n *(2)) — минимально.*

Классические программы преобразуют интегральные уравнения в массив $\{ \ y_i \ \approx \ y(x_i) \ \}_{i=0}^n$. Сеточную функцию $\{ \ y(x_i) \ \}_{i=0}^n$ СКА аналитически не преобразуют (не дифференцируют, не интегрируют, ...).

Варианты метода ряда Чебышева [2] (с. 275 – 348) созданы для решения отдельных линейных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

СКА выполняют только часть преобразований этих вариантов.

3. Метод Галеркина в пространстве $L_2(a, b; \rho)$

$$INPUT = (\ L[y] + g = (L[y] + g)|_{x=d} \cdot y \ , \ [a, b] \ , \ n \ )$$

$$OUTPUT = y_n = solve(\ S_n[L[y] + g - (L[y] + g)|_{x=d} \cdot y]|_{y=(y_n \in H_n[a,b])} = 0 \ ). \tag{7}$$

Оператор S_n уравнения (7) преобразует функцию $y = y(x) \in L_2(a,b;\rho)$ — эта функция имеет на отрезке $[a,b]$ сходящийся ряд Фурье - Чебышева

$$y(x) = a_0(y,[a,b]) \cdot cheb(0,z(x)) + \cdots + a_n(y,[a,b]) \cdot cheb(n,z(x)) + \cdots$$

в частную сумму порядка n её ряда Фурье - Чебышева

$$S_n[y] = a_0(y,[a,b]) \cdot cheb(0,z(x)) + \cdots + a_n(y,[a,b]) \cdot cheb(n,z(x)) \tag{8}$$

— **проектирует** пространство $L_2(a,b,\rho)$ в пространство $H_n[a,b]$.

Пространство $H_n[a,b]$ — линейная оболочка элементов базиса

$$\{\ cheb(i,z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\ \}_{i=0}^{\infty}\ , \quad z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1 \tag{10}$$

с индексом $i = 0, \ldots, n$ — подпространство пространства Гильберта $L_2(a,b;\rho)$.

Элемент общего вида пространства $H_n[a,b]$ (элемент уравнения (7)) имеет базис (10) и символьные коэффициенты $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n\ \in Atom.$

$$(\ y_n \in H_n[a,b]\ ) = c_0 \cdot cheb(0,z(x)) + c_1 \cdot cheb(1,z(x)) + \cdots + c_n \cdot cheb(n,z(x))\ .$$

4. Метод 1 решения ЛИУМК типа A_4 (3) — $method\_1$

$$INPUT = (\ (\ L[y] + g = \lambda \cdot y\ )\ \in\ A_4\ ,\ d\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

Композиция метода Галеркина (7) и метода простой итерации.

1. Вычислить начальное приближение

$$y_{n,0} = 1\ . \tag{11}$$

2. Вычислить последовательность многочленов

$$y_{n,s} = S_n[L[y_{n,s-1}] + g]/S_n[L[y_{n,s-1}] + g]|_{x=d}\ , \quad s = 1,2,\ldots\ . \tag{12}$$

3. Вычислить предел последовательности многочленов (12) при $s \to \infty$

$$method\_1(\ L[y] + g = (L[y]+g)|_{x=d} \cdot y\ ,\ [a,b],\ n\ ) =$$

$$OUTPUT = y_n = \lim_{s \to \infty}\ y_{n,s}\ . \tag{13}$$

5. Алгоритм 1 преобразования (12) для СКА — $algorithm\_1$

$$INPUT = (\ L[y] + g \in A_4\ ,\ y_{n,s-1} \in P_n\ ,\ d\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \tag{14}$$

$$OUTPUT = y_{n,s} = S_n[L[y_{n,s-1}] + g]/S_n[L[y_{n,s-1}] + g]|_{x=d}\ . \tag{12}$$

1. Вычислить многочлен

$$L_s(x) = (L[y_{n,s-1}] + g)/(L[y_{n,s-1}] + g)|_{x=d}\ . \tag{15}$$

2. Вычислить многочлен

$$L_s(z) = subs(\ x = h * (z-1)/2 + a\ ,\ L_s(x)\ )\ . \tag{16}$$

3. Привести многочлен (16) к каноническому виду

$$canplf(L_s(z)) = c_0 + c_1 \cdot z + \cdots + c_m \cdot z^m\ . \tag{17}$$

4. Вычислить коэффициенты многочлена (17)

$$Coef(canplf(L_s(z))) = \{\ c_0,\ c_1, \ldots, c_m\ \}\ . \tag{18}$$

5. По алгоритму Кленшоу [2] преобразовать коэффициенты (18) в коэффициенты Фурье - Чебышева многочлена $L_s(z)$

$$\{C_0,\ C_1, \ldots, C_m\} = Clenslaw(\{\ c_0,\ c_1, \ldots, c_m\ \})\ . \tag{19}$$

6. Вычислить многочлен

$$S_{n,[-1,1]}[L_s(z)] = C_0 \cdot cheb(0,z) + \cdots + C_n \cdot cheb(n,z)\ . \tag{20}$$

7. Вычислить многочлен (12)

$$y_{n,s} = S_n[L_s] = subs(z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\ ,\ S_{n,[-1,1]}[L_s(z)])\ . \tag{21}$$

Лемма 1. *Все преобразования алгоритма 1 — алгебраические.*

Доказательство. Согласно спецификации преобразований алгоритма 1.
Преобразования алгоритма 1 — это линейные алгебраические преобразования алгебраических многочленов и преобразование коэффициентов многочлена по алгоритму Кленшоу.
Алгоритм Кленшоу [2] — алгебраическое преобразование.

6. Программирование алгоритма 1 в системе APS

Вход (14) для APLAN - процедуры 1.

$$INPUT = (\ \texttt{Ly}\ ,\ \ \texttt{d}\ ,\ \ \texttt{y\_n}\ ,\ \ \texttt{z}\ ,\ \ \texttt{u}\ ,\ \ \texttt{n}\ \ ).\tag{22}$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

```
Ly  =  int_op(c_1, d_1, K_1 * y, t)  +  ···  +
       int_op(c_p, d_p, K_p * y, t)  +  g  ;  ~
```

$$L[y] + g = \int_{c_1(x)}^{d_1(x)} K_1(x,t) \cdot y(t) + \cdots + \int_{c_p(x)}^{d_p(x)} K_p(x,t) \cdot y(t)\, dt + g(x)\ , \tag{2}$$

где `y` $\sim y$, `t` $\sim t$, `x` $\sim x$ — атомы, `g` $\sim g(x)$, `c_i` $\sim c_i(x)$, `d_i` $\sim d_i(x)$, `K_i` $\sim K_i(x,t)$,

$$\texttt{y\_n = f * x ^ n } + \cdots + \texttt{g} \quad \sim \; y_{n,s-1} = f \cdot x^n + \cdots + g \;\; (14) \; - \tag{23}$$

термы атомов `x` , `t` и констант (чисел) с операциями `*` , `+` , `^` .

`d` $\sim$ $d \in R$.
`z` $\sim$ $z(x) = 2 \cdot (x - a)/h - 1$, $h = b - a$.
`u` $\sim$ $z^{-1}(x) = h \cdot (x + 1)/2 + a$.
`n` $\sim$ $n \in N$.

APLAN - процедура 1. Запись алгоритма 1 на языке APLAN.

Операторы этой процедуры построены [4] для процедуры a-метода Дзядыка.

```
L_s := sub_i_u(Ly , y_n);              /*  L[y_n] + g   */
L_s_d := 1/canplf(subs(x = d, L_s )      /*  1/L_s(d)  */
L_s_n := canplf( L_s_d * L_s     )  /*  L_s / L_s(d)  */
L_s_z := canplf(subs(x = u, L_s_n ) /* L_s(u)/ L_s(d) */
   m := deg( L_s );                    /*  deg( L_s )  */
Coef_pol(L_s_z,m);                 /*  c_0 , ... , c_m  */
Coef_Cheb(m);                      /*  C_0 , ... , C_m  */
y_z := Cheb( COEF, n );  /* S_{n,-1,1}[L_s(z)/L_s(d)] */
y_n := canplf(subs(x = z, y_z)); /*  S_n[L_s/L_s(d)]  */
```

Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1.

Оператор `sub_i_u( Ly , y_n )` преобразует: оператор ЛИУМК (3) `Ly` $\sim L[y] + g$ и полином `y_n` $\sim y_{n,s-1}$ (14) в полином

$$\texttt{sub\_i\_u(Ly , y\_n)} \;\sim\; L[y_{n,s-1}] + g$$

— результат преобразования оператором $L[y] + g$ (3) полинома $y_{n,s-1}$.

Оператор `canplf( subs( x = d, L_s ) )` вычисляет значение полинома `L_s` $\sim L[y_{n,s-1}] + g$ в точке $x = d$ — число $(L[y_{n,s-1}] + g)|_{x=d}$.

Оператор `L_s_n := canplf( L_s_d * L_s )` преобразует полином $L[y_{n,s-1}] + g$ в полином

$$\texttt{L\_s\_n} \;\sim\; L_s(x) = (L[y_{n,s-1}] + g)/(L[y_{n,s-1}] + g)|_{x=d} \tag{15}$$

и приводит этот полином к каноническому виду — сумме мономов `x ^ i $ b`.

Оператор `L_s_z := canplf(subs(x = u, L_s )` переносит полином `L_s` с отрезка $[a, b]$ на отрезок $[-1, 1]$ — преобразует полином (15) в полином

$$\texttt{L\_s\_z} \;\sim\; L_s(z) = subs(\; x = h * (z - 1)/2 + a \;,\; L_s(x)\;) \tag{16}$$

и приводит этот полином к каноническому виду — сумме мономов `x ^ i $ b`.

Оператор `Coef_pol(L_s_z,m)` вычисляет $m + 1$ коэффициент Тейлора `COEF` $\sim \{c_0,\; c_1, \ldots, c_m\}$ (18) полинома `L_s_z` (16).

Оператор `Coef_Cheb(m)` преобразует $m+1$ коэффициент Тейлора (18) в коэффициенты Чебышева (19).

$$\texttt{COEF} = \{ c_0,\ c_1, \ldots, c_m \} \ \rightarrow\ \{ C_0,\ C_1, \ldots, C_m \} = \texttt{COEF}\ .$$

Ряд Чебышева с этими коэффициентами, после приведения к каноническому виду, тождественен полиному $L_s(z)$ (17).

Оператор

$$\texttt{y\_z := Cheb(COEF , n)} \ \sim\ S_{n,[-1,1]}(L_s(z)/L_s(d)) \quad (20)$$

преобразует коэффициенты Чебышева `COEF` (19) в частную сумму порядка n ряда Чебышева с этими коэффициентами (на отрезке $[-1,1]$) — полином

$$\texttt{y\_z} \ \sim\ S_{n,[-1,1]}[L_s(z)] = C_0 \cdot cheb(0,z) + \cdots + C_n \cdot cheb(n,z)\ . \qquad (20)$$

Оператор `y_n := canplf(subs(x = z, y_z));` переносит полином `y_z` (20) с отрезка $[-1,1]$ на отрезок $[a,b]$ — преобразует в полином $y_{n,s}$ (12).

$$\texttt{y\_n} \ \sim\ y_{n,s} = S_n[L_s] = subs(z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\ ,\ S_{n,[-1,1]}[L_s(z)])\ . \qquad (21)$$

7. Решение APLAN - процедурой 1 модельной задачи

$$y = -\lambda^2 \cdot (\int_0^x (1-x)\cdot t \cdot y(t)\, dt + \int_x^1 (1-t)\cdot x \cdot y(t)\, dt\ )\ . \qquad (24)$$

Уравнение (24) эквивалентно классической модельной задаче для вычисления собственных функций — задаче о форме собственных колебаний струны.

$$y'' = -\lambda^2 \cdot y\ , \qquad y(0) = 0\ , \qquad y(1) = 0\ .$$

Вход (22) APLAN - процедуры 1 для интегрального уравнения (24).

```
process[1] := (
           Ly := int_op(0, x, (-1 * (x + -1) * t) * y, t) +
                 int_op(x, 1, (-1 * x * (t + -1)) * y, t) ;
d := 1/2;  y_n := 1;  u := 1/2 * x + 1/2;  z := 2 * x + -1;
          ... );
```

Результаты преобразования ЛИУМК (24) процедурой 1 ($n = 10$).

```
L_s := sub_i_u(Ly, y_n) = x ^ 2 $ rat(-1,2) + x $ rat(1,2);
L_s_d := 1/canplf(subs(x = d, L_s ) =                  8 ;
L_s_n := canplf( L_s_d * L_s ) =       x ^ 2 $ -4 + x $ 4 ;
L_s_z := canplf(subs(x = u, L_s ) =        1 + x ^ 2 $ -1 ;
    m := deg( L_s_z ) =                                 2 ;
  Coef_pol(L_s_z,m);                 COEF = ( 1 , 0 , -1 ) ;
  Coef_Cheb(m);        COEF = ( rat(1,2) , 0 , rat(-1,2) ) ;
 y_z := Cheb( COEF, n ) =                       rat(1,2) +
                              rat(-1,2) * (2 * x ^ 2 + -1) ;
y_n := canplf(subs(x = z, y_z) =       x ^ 2 $ -4 + x $ 4 ;
```

8. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[0,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$\sin(\pi \cdot x) \ = \ solve(\ y(x) = -\lambda^2 \cdot (\ \int_0^x (1-x) \cdot t \cdot y(t) \, dt + \int_x^1 (1-t) \cdot x \cdot y(t) \, dt \ )$$

— решения ЛИУМК (24) — полиномом — решением уравнения (24) по методу 1

$$y_n \ = \ method \ 1(\int_0^x (1-x) \cdot t \cdot y(t) \, dt + \int_x^1 (1-t) \cdot x \cdot y(t) \, dt, \ 1/2, \ [0,1], \ n \ ) \quad (25)$$

принимает следующие значения

$$\{ \| \sin(\pi \cdot x) - y_{2 \cdot i} \|_{C_{[0,1]}} = \| \sin(\pi \cdot x) - y_{2 \cdot i+1} \|_{C_{[0,1]}} \ \}_{i=0}^{7} \ = \{0.5, \ 0.03, \ 0.00065,$$
$$7 \cdot 10^{-6}, \ 4.8 \cdot 10^{-8}, \ 2.2 \cdot 10^{-10}, \ 7.6 \cdot 10^{-13}, \ 2.4 \cdot 10^{-15}, \ 8 \cdot 10^{-16}\} \ . \quad (26)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y = \sin(\pi \cdot x)$ *на отрезке* $[0,1]$ принимают следующие значения

$$\{ \ a_{2 \cdot i+1}(\sin(\pi \cdot x), [0,1]), \ \}_{i=0}^{\infty} = 0 \ ,$$

$$\{ \ a_{2 \cdot i}(\sin(\pi \cdot x), [0,1]), \ \}_{i=0}^{8} \ = \ \{0.47, \ -0.5, \ 0.028, \ -0.0006,$$
$$6.7 \cdot 10^{-6}, \ -4.7 \cdot 10^{-8}, \ 2.2 \cdot 10^{-10}, \ -7.5 \cdot 10^{-13}, \ 1.9 \cdot 10^{-15} \ \} \ . \quad (27)$$

С ростом параметра $2 \cdot i$, эти коэффициенты регулярно убывают

$$\{ \ |a_{2 \cdot i+2}(\sin(\pi \cdot x), [0,1])| / |a_{2 \cdot i}(\sin(\pi \cdot x), [0,1])| \ \}_{i=0}^{7} =$$
$$\{ \ 1.06, \ 0.056, \ 0.021, \ 0.011, \ 0.0069, \ 0.0047, \ 0.0034, \ 0.0025 \ \} \ .$$

Функция $\sin(\pi \cdot x)$ — целая. Норма многочлена Чебышева тождественна 1.

$$\| \cos(i \cdot \arccos(2 \cdot x - 1)) \|_{C_{[0,1]}} = \| \cos(i \cdot \arccos(x)) \|_{C_{[-1,1]}} = \| \cos(i \cdot t) \|_{C_{[0,\pi]}} = 1 \ .$$

Следовательно. Из этих тождеств и тождества (27) следует утверждение.

Вывод 1. *В пространстве* $C_{[0,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $\sin(\pi \cdot x)$ *алгебраическими полиномами порядка* n — $E_{n,C_{[0,1]}}[\sin(\pi \cdot x)]$ — *имеет* главную часть — *модуль коэффициента Фурье - Чебышева порядка* $2 \cdot [n/2] + 2$ *функции* $\sin(\pi \cdot x)$ *на отрезке* $[0,1]$ *и справедливо тождество*

$$|a_{2 \cdot [n/2]+2}(\sin(\pi \cdot x), [0,1])| \ \approx \ \inf_{c_0, \ldots, c_n} \| \sin(\pi \cdot x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[0,1]}} =$$

$$E_{n,C_{[0,1]}}[\sin(\pi \cdot x)] = (1 + \beta_n) \cdot |a_{2 \cdot [n/2]+2}(\sin(\pi \cdot x), [0,1])| \ , \quad (28)$$

где

$$\beta_{2 \cdot i} = \beta_{2 \cdot i+1} \ , \quad |\beta_{2 \cdot i}| \le \gamma_{2 \cdot i+2} / (1 - \gamma_{2 \cdot i+4}) \ , \quad \beta_n = o(1) \ ,$$
$$\{ \ \gamma_{2 \cdot i+2} / (1 - \gamma_{2 \cdot i+4}) \ \}_{i=1}^{10} = \{ \ 0.06, \ 0.02, \ 0.01, \ \ldots, \ 0.003 \ \} .$$

Этот коэффициент Фурье - Чебышева принимает значения (27).

Из тождеств (26) — (28) следует утверждение.

Вывод 2. *Коэффициент оптимальности (6) преобразования APLAN - процедурой 1 ЛИУМК (24) и отрезка* $[0,1]$ *в многочлен* y_n *(25)*

$$procedure\_1 \;:\; (\; LIUMK\ (24),\ [0,1],\ n\ ) \;\rightarrow\; y_n \;\; (25)$$

в пространстве $C_{[0,1]}$ *имеет главную часть*

$$\|\sin(\pi\cdot x) - y_n\|_{C_{[0,1]}} \;/\; |a_{2\cdot[n/2]+2}(\sin(\pi\cdot x),[0,1])| \;=$$

$$(1+\beta_n)\;\cdot\;\|\sin(\pi\cdot x) - y_n\|_{C_{[0,1]}} \;/\; E_{n,C_{[0,1]}}[\sin(\pi\cdot x)] \;=\; (1+\beta_n)\cdot$$

$$C_n(\;method\_1\,,\;\int_0^x (1-x)\cdot t\cdot y(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)\cdot x\cdot y(t)\,dt = \lambda\cdot y(x)\,,\;0.5\;,\;C_{[0,1]}\;)\,.$$

Эта главная часть принимает следующие значения

$$\|\sin(\pi\cdot x) - y_n\|_{C_{[0,1]}} \;/\; |a_{2\cdot[n/2]+2}(\sin(\pi\cdot x),[0,1])| = (1+\alpha_n)\;,$$

$$\{1+\alpha_{2\cdot i} = 1+\alpha_{2\cdot i+1}\}_{i=0}^{5} \;=\; \{\;1,\;1.1,\;1.09,\;1.05,\;1.02,\;1.01\;\}\;.$$

Замечание 1. Пусть y_n — алгебраический полином порядка n и $y = y(x)$ — функция — элемент пространства $X = C_{[a,b]},\; L_2(a,b;\rho),\;\ldots$.

Тогда справедливы неравенства

$$\|y - y_n\|_X \;\geq\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n\cdot x^n)\|_X\;,\qquad \|y - y_n\|_X \;<\; \infty\,.$$

Следовательно.

Коэффициент оптимальности метода *method* для преобразования входа (1) в алгебраический полином y_n порядка n в пространстве $X = C_{[a,b]},\;\ldots$

$$C_n(method, F[y]=0, X) = \|y - y_n\|_X / \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n\cdot x^n)\|_X$$

имеет *область значений* — интервал $[1,\infty)$.

$$1 \;\leq\; C_n(method, F[y]=0, X) \;<\infty\,.$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

9. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть операнды входа (22) имеют рациональные константы. Тогда процедура 1 преобразует вход (22) в полином* $y_{n,s}$ *(21) без погрешностей.*

Доказательство. Согласно лемме 1, алгоритм 1 имеет только алгебраические преобразования. Следовательно.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняют это преобразование без погрешностей.

Теорема 2. *Для сложности преобразования APLAN - процедурой 1 входа (22) справедливо тождество*

$$Q(APLAN{-}procedure\,1(\ L[y]+g \in A_4,\ d,\ y_{n,s-1} \in P_n,\ [a,b],\ n\ ))$$
$$= O(n^3) + 3 \cdot Q(canplf(P_m)) + Q(\texttt{sub\_i\_u(Ly, y\_n)}) +$$
$$Q(cheb(0,x) + \cdots + Q(cheb(n,x)\ ,$$

где $Q($ `sub_i_u(Ly , y_n)` $)$ *— сложность преобразования оператором* `sub_i_u` [4] *оператора* `Ly` $\sim L[y]+g$ (1) *и полинома* `y_n` $\sim y_{n,s-1}$,
$Q(canplf(P_m))$ — сложность преобразования оператором $canplf$ алгебраического полинома порядка m (коэффициенты полинома – числа),
$Q(cheb(i,x))$ — сложность вычисления полинома $cheb(i,x)$ базиса (10).

Доказательство. APLAN - процедура 1 — линейная. Сложность замены в многочлене порядка m атома `x` на моном `c * x + d`

$$Q(\ \texttt{subs(x = c * x + d, L\_s)}\ ) = O(m)\ .$$

Сложность вычисления порядка полинома канонического вида

$$\texttt{L\_s\_z = canplf(L\_s\_z);} \quad - \quad Q(\ \texttt{deg(L\_s\_z)}\ ) = O(1)\ .$$

Для интегрального оператора (3) и многочлена $y_n(t)$ вида (2)

$$m = \deg(\int_{c_i(x)}^{d_i(x)} K_i(x,t) \cdot y_n(t)\,dt) = O(n) =$$

$$(n+1+\deg_x(K_i(x,t)) + \deg_t(K_i(x,t))) \cdot \max\{\ \deg(c_i(x)),\ \deg(d_i(x))\ \}\ .$$

Сложность преобразования многочлена порядка m канонического вида в его коэффициенты — $Q($ `Coef_pol(L_s_z,m)` $) = O(m^2)$.

Сложность преобразования коэффициентов Тейлора полинома порядка m в коэффициенты Чебышева этого полинома по алгоритму 14.3 [2] (с. 261).

$$Q(\ \texttt{Coef\_Cheb(m)}\ )\ =\ O(m^2)\ .$$

10. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают утверждения.

Теорема 3. *Пусть операнды входа (14) имеют рациональные константы. Тогда СКА преобразуют вход (14) в полином* $y_{n,s}$ *(21) без погрешностей.*

Теорема 4. *Сложность преобразования по алгоритму 1 входа (14) — полиномиальная по параметру* n .

11. Эффективность метода 1 и метода Галеркина (7)

В пространстве $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ отношение

$$\|y - y_n\|_X / E_{n,X}[y] = C_n(\ Galerkin_{L_2(a,b;\rho)}\ ,\ L[y] + g = (\ L[y] + g\ )|_{x=d} \cdot y\ ,\ X\ )\ ,$$

где

$$E_{n,X}[y]\ =\ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X\ ,$$

— коэффициент оптимальности преобразования входа (1) в полином (7) в этом пространстве X имеет область значений $[1, \infty)$. Следовательно.

Метод Галеркина (7) определяет классы $A_{4,X}$ **и** $A^2_{4,X}$ **ЛИУМК (3).**

Если ЛИУМК (3) принадлежит к классу $A_{4,X}$ *, то в пространстве* X *коэффициент оптимальности преобразования входа (1) в полином (7) ограничен.*

$$C_n(\ Galerkin_{L_2(a,b;\rho)}\ ,\ (\ L[y] + g = (\ L[y] + g\ )|_{x=d} \cdot y\ ) \in A_{4,X}\ ,\ X\ ) = O(1)\ .$$

Если ЛИУМК (3) принадлежит к классу $A^2_{4,X}$ *, то в пространстве* X *коэффициент оптимальности преобразования входа (1) в полином (7) асимптотически тождественен 1.*

$$C_n(\ Galerkin_{L_2(a,b;\rho)}\ ,\ (\ L[y] + g = (\ L[y] + g\ )|_{x=d} \cdot y\ ) \in A^2_{4,X}\ ,\ X\ ) = 1 + o(1)\ .$$

Классы $A_{4,X},\ A^2_{4,X}$ **ЛИУМК (3) оценивают** условия теоремы сходимости [3] (глава 4) проекционных методов решения линейных операторных уравнений.

Главное требование теоремы [3] (глава 4) сходимости проекционных методов.

В пространстве X *уравнение (4) является корректной задачей.*

Достаточное условие выполнения главного требования теоремы сходимости [3] (глава 4) проекционных методов решения линейных операторных уравнений.

В пространстве X в ε - окрестности решения $y(x)$ уравнения (4) ограничен оператор обратный линейной части оператора

$$(L[y] + g)|_{x=d} \cdot y - L[y]\ .$$

Это требование выполняется, если в ε - окрестности точки d решение $y(x)$ уравнения (4) не имеет нулей.

Заключение теоремы сходимости [3] проекционных методов имеет вид

$$\|y - y_n\|_X = O(\|y - S_n[y]\|_X)\ .$$

Требование теоремы сходимости метода Галеркина [3] (глава 4) решения операторных уравнений к оператору проектирования функций $y = y(x) \in X$ в **пространство** P_n *— пространство алгебраических полиномов порядка* n

$$V_n\ :\ X\ \to\ P_n\ ,\ \ V_n^2 = V_n\ ,\quad V_n[y] = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \qquad (29)$$

проекционного метода

$$y_n = solve(\ V_n[L[y] + g - (L[y] + g)|_{x=d} \cdot y]|_{y=(y_n \in P_n)} = 0\ ) \qquad (30)$$

это **требование к аппроксимационным характеристикам этого оператора.**

Если аппроксимационные характеристики оператора S_n (8) более высокие, чем аппроксимационные характеристики оператора V_n (29), то классы $A_{4,X}$, $A^2_{4,X}$ ЛИУМК (3) более широкие, чем классы ЛИУМК (3), на которых, соответственно, коэффициент оптимальности метода (30) ограничен или тождественен 1.

12. Представительность классов $A_{4,L_2(a,b;\rho)}$ и $A^2_{4,L_2(a,b;\rho)}$

Для оператора S_n (8) справедливы тождества [2] (с. 53).

$$\|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b,\rho)} = E_{n,L_2(a,b,\rho)}[y]\ , \qquad \|S_n\|_{L_2(a,b;\rho)} = 1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 3. *В пространстве $L_2(a,b,\rho)$ среди операторов проектирования V_n (29) функций $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y \in L_2(a,b,\rho)$ в пространство P_n оператор S_n (8) наилучше удовлетворяет критерии.*

1. *Минимум нормы оператора* — справедливо тождество

$$\inf_{V_n = V_n^2\ :\ L_2(a,b;\rho) \to P_n} \|V_n\|_{L_2(a,b;\rho)} = \|S_n\|_{L_2(a,b;\rho)} = 1\ ,$$

2. *Минимум коэффициента оптимальности преобразования функции $y(x) \in L_2(a,b;\rho)$ в алгебраический многочлен порядка n .*

$$\inf_{V_n = V_n^2\ :\ L_2(a,b;\rho) \to P_n} \|y(x) - V_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)} = \|y(x) - S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)}\ .$$

Вывод 4. *В пространстве $L_2(a,b,\rho)$ заключение теоремы сходимости [3] (глава 4) для метода Галеркина в пространстве $L_2(a,b,\rho)$ (7) имеет вид*

$$\|y - y_n\|_{L_2(a,b,\rho)} = O(E_{n,L_2(a,b,\rho)}[y])\ .$$

Если в пространстве $L_2(a,b,\rho)$ ЛИУМК (3) типа A_4 удовлетворяет условия теоремы сходимости [3] (глава 4) проекционных методов с оператором проектирования S_n (8), то это ЛИУМК принадлежит к классу $A_{4,L_2(a,b;\rho)}$.

13. Представительность классов $A_{4,C_{[a,b]}}$ и $A^2_{4,C_{[a,b]}}$

Для операторов проектирования V_n (29) функций $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y \in X$, $X = C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots$ в пространство алгебраических полиномов порядка n справедливы неравенства [2] (с. 71, 84)

$$\|y - V_n[y]\|_X \le (\|V_n\|_X + 1) \cdot E_{n,X}[y]\ ,$$

$$\|V_n\|_{C_{[a,b]}} \geq (2/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \ .$$

Для нормы оператора S_n (8) справедливо тождество [2] (с. 77)

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} = (4/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \ , \quad O(1) \leq 3 \ .$$

Из этих тождества, неравенств и теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [3] следуют утверждения.

Вывод 5. *Среди операторов* V_n *(29) (операторов проектирования функций* $y = y(x), \ x \in [a,b]$, $y \in C_{[a,b]}$ *в пространство алгебраических полиномов порядка* n *) оператор* S_n *(8) оптимально удовлетворяет следующие критерии.*
1. *Минимум нормы оператора* — справедливо неравенство

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} / \inf_{V_n = V_n^2 \ : \ C_{[a,b]} \to P_n} \|V_n\|_{C_{[a,b]}} \leq 2 + o(1) \, .$$

2. *Минимум коэффициента оптимальности (6) преобразования функции* $y(x) \in C_{[a,b]}$ *в многочлен порядка* n — справедливы неравенства

$$\|y(x) - S_n[y]\|_{C_{[a,b]}} / E_{n, C_{[a,b]}}[y] =$$

$$C_n(\ S_n \ , \ y(x) \ , \ C_{[a,b]} \ ) \leq (4/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \, ,$$

$$\inf_{V_n = V_n^2 \ : \ C_{[a,b]} \to P_n} \|y(x) - V_n[y]\|_{C_{[a,b])}} / E_{n, C_{[a,b])}}[y] =$$

$$\inf_{V_n = V_n^2 \ : \ C_{[a,b]} \to P_n} C_n(\ V_n, \ y(x), \ C_{[a,b]} \ ) \leq (2/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \, .$$

Вывод 6. *Условия принадлежности ЛИУМК (3) к классу* $A_{4, C_{[a,b]}}$.
1. *Условия теоремы сходимости [3] (глава 4) проекционных методов* (в $C_{[a,b]}$).
2. *Решение этого ЛИУМК удовлетворяет неравенство*

$$\|y - S_n[y]\|_{C_{[a,b]}} \leq Const \cdot \ E_{n, C_{[a,b]}}[y] \ .$$

Вывод 7. *Условия принадлежности ЛИУМК (3) к классу* $A^2_{4, C_{[a,b]}}$.
1. *Условия теоремы сходимости [3] (глава 4) проекционных методов* (в $C_{[a,b]}$).
2. *Решение этого ЛИУМК удовлетворяет тождество*

$$\|y - S_n[y]\|_{C_{[a,b]}} = (1 + o(1)) \cdot \ E_{n, C_{[a,b]}}[y] \ .$$

Заключение

Теоремы 1 — 4 и выводы 2 — 7 доказывают следующее утверждение.

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные средства для исследования в СКА математических моделей объектов, определяемых задачами на собственные значения для ЛИУМК (3) — линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами типа A_4 .

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.
2. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. – 1969. – 456 с.
4. Денисенко П. Н., Летичевский А. А. (научная редакция). *Алгебраическое программирование.* Учебное пособие. — Кировоград: КННПК. — 2002. — 120 с.