21 Сентября 2011

Инсерционное моделирование 1

Лекция 3

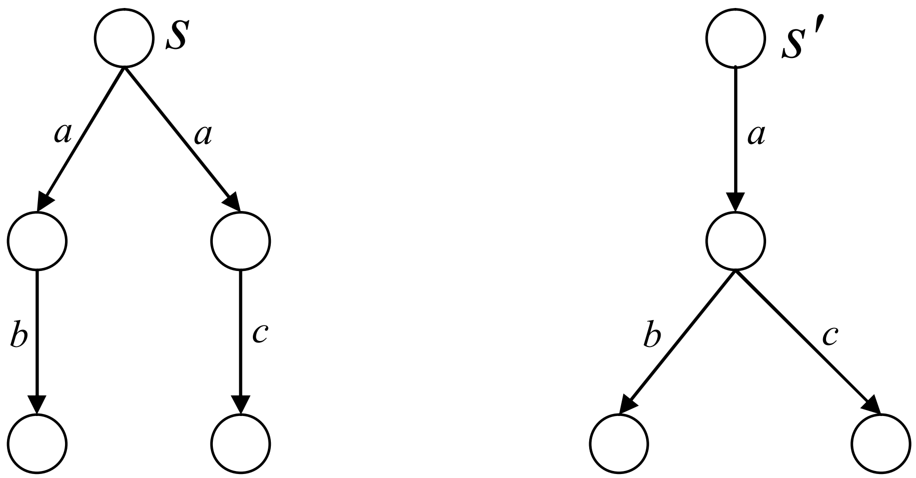
Бисимуляционная эквивалентность и алгебра поведений

Поведение и эквивалентность транзиционных систем

Поведение транзиционной системы:
множество последовательностей действий, которые она может совершить (?)

$$\boxed{s \sim_T t \Leftrightarrow L(s) = L(t)}$$

Трассовая эквивалентность слишком слаба:



Бисимуляционная эквивалентность
bisimilarity (Milner 1980, D.Park 1981)

Отношение бисимуляции (bisimulation): $R \subseteq S^2$

1. $(s, s') \in R \Rightarrow (s \in S_\Delta \Leftrightarrow s' \in S_\Delta, s \in S_\perp \Leftrightarrow s' \in S_\perp)$
2. $(s, s') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t \Rightarrow \exists t'((t, t') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t')$
3. $(s, s') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists t((t, t') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t)$

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "a"] \arrow[d, "R"'] & t \arrow[d, dashed, "R"] \\
s' \arrow[r, dashed, "a"] & t'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, dashed, "R"'] & t \arrow[d, "R"] \\
s' \arrow[r, "a"] & t'
\end{tikzcd}
$$

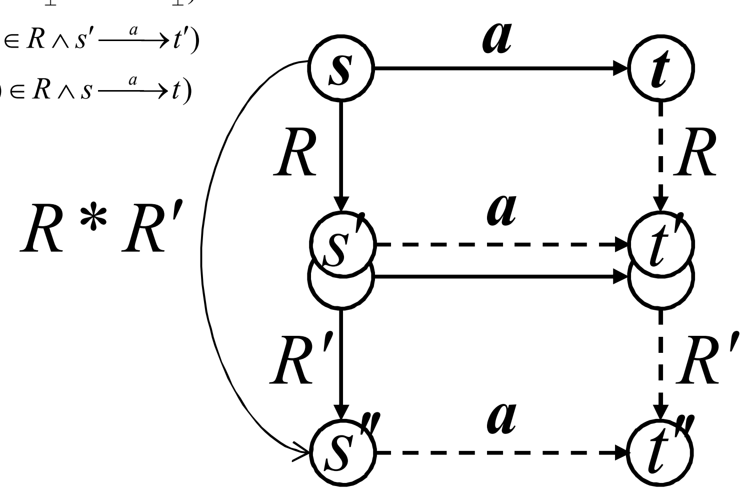
bisimulation => bisimilarity

Бисимуляционная эквивалентность состояний

$$s \text{ и } s' \text{ бисимуляционно эквивалентны}$$
$$s \sim_B s' \Leftrightarrow \exists(\text{бисимуляция } R)((s,s') \in R)$$

Бисимуляционная эквивалентность есть эквивалентность

1. $(s,s') \in R \Rightarrow (s \in S_\Delta \Leftrightarrow s' \in S_\Delta, s \in S_\perp \Leftrightarrow s' \in S_\perp)$
2. $(s,s') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t \Rightarrow \exists t'((t,t') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t')$
3. $(s,s') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists t((t,t') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t)$



Бисимуляционная эквивалентность состояний совпадает с максимальной бисимуляцией на *S*.

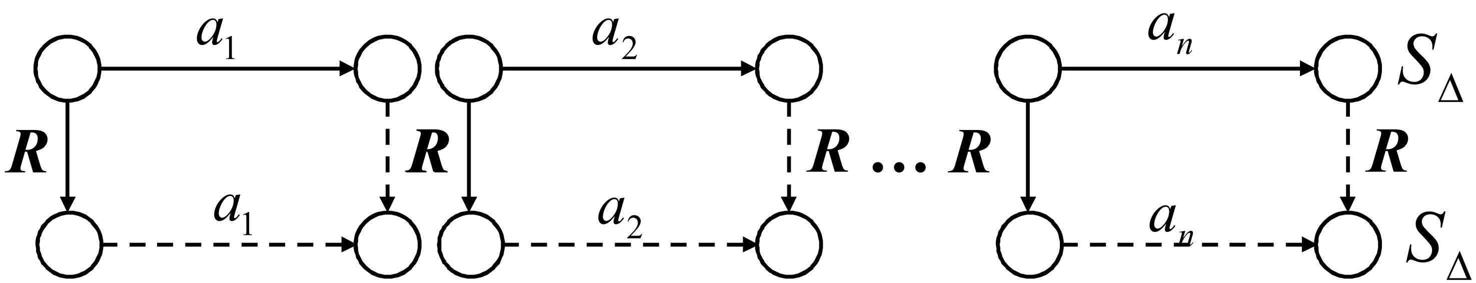
Бисимуляционная эквивалентность систем

Отношение бисимуляции распространяется на состояния разных систем.

$$S \sim_B S' \Leftrightarrow$$
$$\forall (s \in S) \exists (s' \in S')(s \sim_B s') \wedge$$
$$\forall (s' \in S') \exists (s \in S)(s' \sim_B s)$$

Для детерминированных систем бисимуляционная эквивалентность состояний совпадает с трассовой

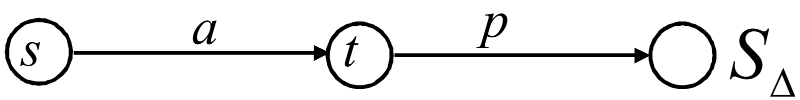
$$s \sim_B s' \Rightarrow L(s) = L(s') \Leftrightarrow s \sim_T s'$$



Обратное, вообще говоря, не верно

Если система детерминирована, то $L(s)$=$L(s')$ есть бисимуляция.

$$\boxed{s \xrightarrow{a} t,\ p \in L(t) \Rightarrow ap \in L(s)}$$

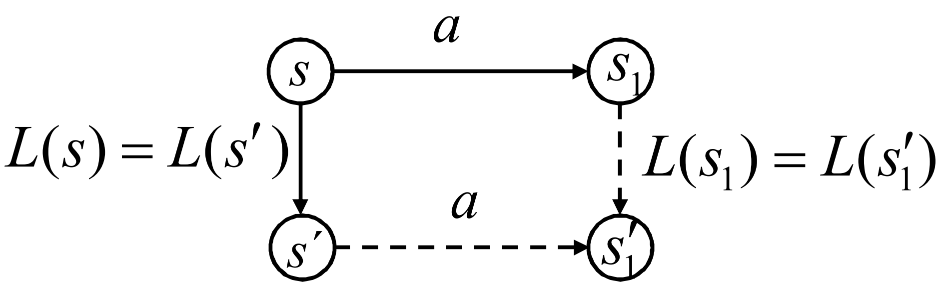


$$L(s) = L(s'), s \xrightarrow{a} s_1, p \in L(s_1) \Rightarrow ap \in L(s) = L(s') \Rightarrow$$

$$\exists s_1'(s' \xrightarrow{a} s_1' \xrightarrow{p} s'' \in S_\Delta \Rightarrow$$

$$p \in L(s_1') \Rightarrow L(s_1) \subseteq L(s_1')$$

$$L(s_1') \subseteq L(s_1) \Rightarrow L(s_1') = L(s_1)$$



Пример: кофейный автомат

Атрибуты:

c: int – касса

d: int – количество порций

Действия:

z – бросить монету

+ – получить кофе и сдачу

- – получить отказ и монету

Состояния:

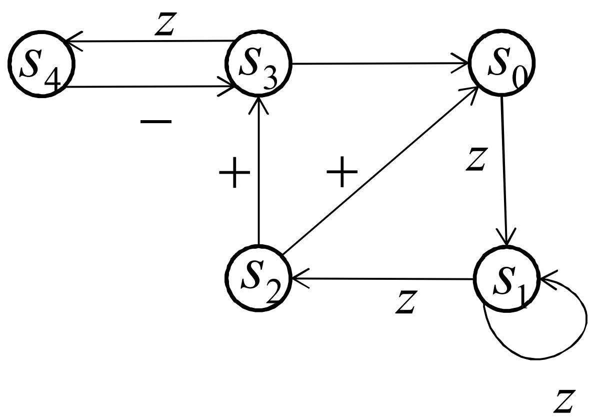
$$s_0 = (c = 0, d > 0)$$

$$s_1 = (0 < c < 150, d > 0)$$

$$s_2 = (150 \le c, d > 0)$$

$$s_3 = (c = 0, d = 0)$$

$$s_4 = (c > 0, d = 0)$$



Конкретизация кофейного автомата

Действия:
$z(y)$ – бросить монету y:int
+ – получить кофе и сдачу
- – получить отказ и монету
Состояния: (c, d)

$$\forall(x, y : \text{int})((c = x < 150, d > 0) \rightarrow < z(y) > (c = x + y), d > 0)$$

$$\forall(x : \text{int})((c \geq 150, d = x > 0) \rightarrow < + > (c = 0, d < x)$$

$$(c > 0, d = 0) \rightarrow < - > (c = 0)$$

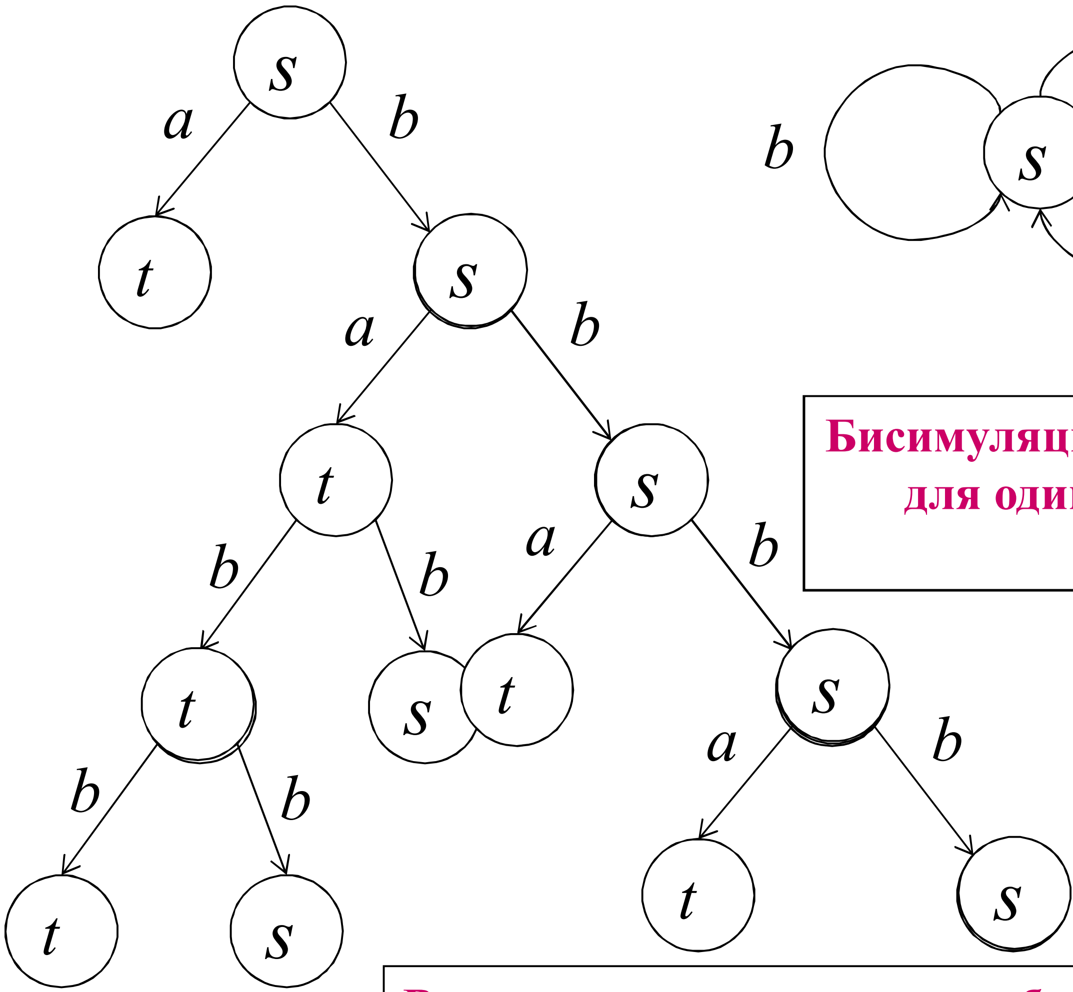
$$(c = 0, d = 0) \rightarrow < \tau > (d > 0)$$

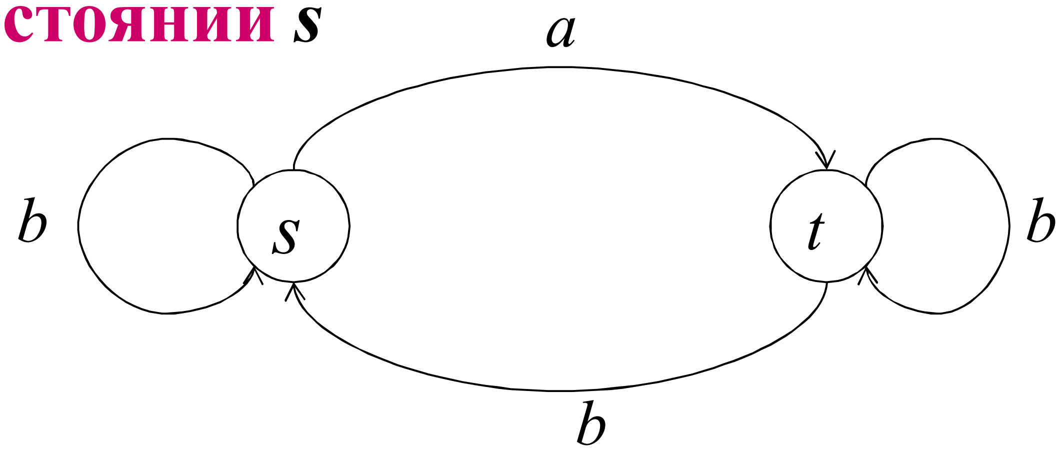
Задачи

1. Построить диаграмму переходов конкретизированной системы при условии, что *y =25,50*
2. Написать правила переходов системы с явным изменением d,
При условии, что $0 \le d \le 50$

ПОВЕДЕНИЕ

системы в состоянии *s*

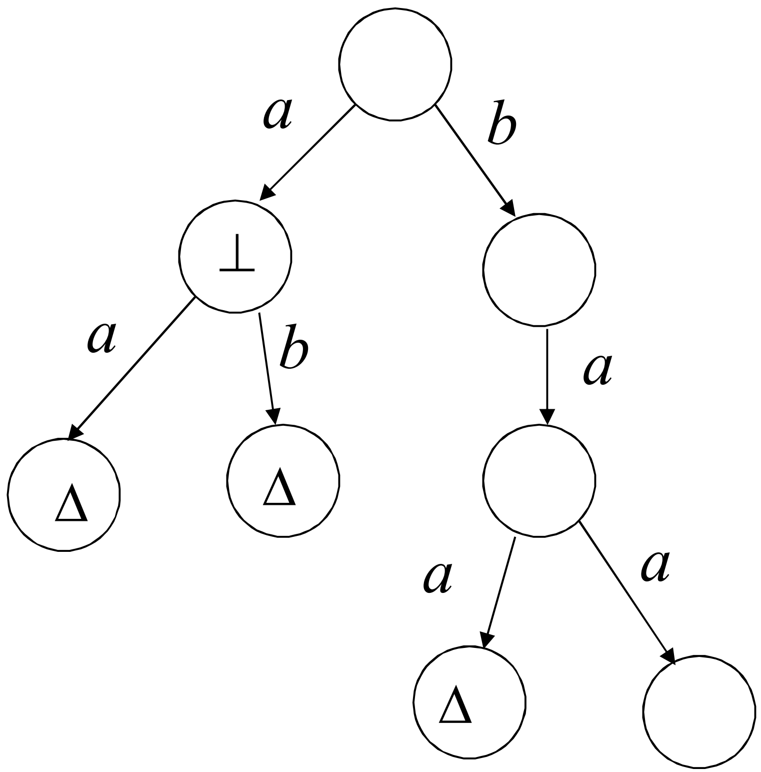




Бисимуляционно эквивалентные наследники для одинаковых отметок склеиваются (идемпотентность)

В двух состояниях система обладает одинаковым поведением <=> эти состояния бисимуляционно эквивалентны

Алгебра поведений

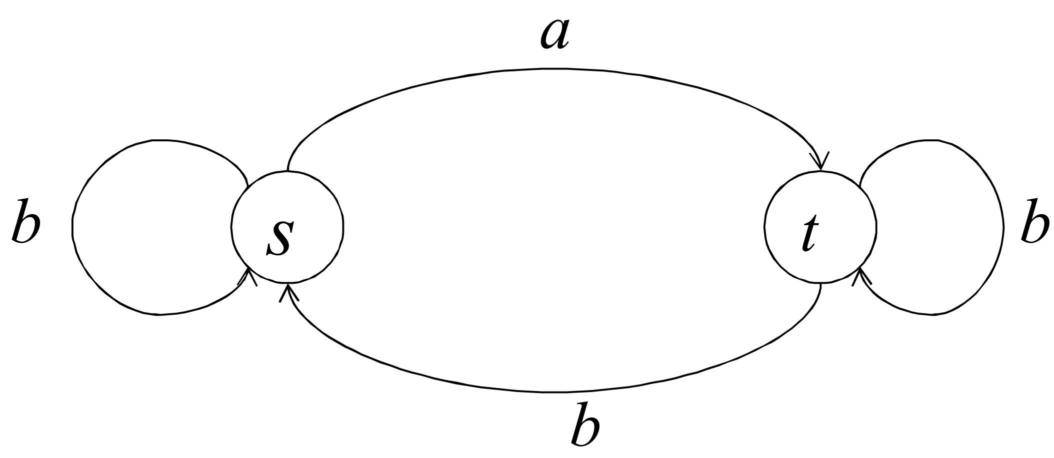


$$a.(a+b+\perp)+b.a.(a+a.0)$$

$$a.\,\Delta = a$$

Бесконечные поведения

$$s = a.t + b.s$$
$$t = b.s + b.t$$



$$s = a.t + b.s = a.(b.s + b.t) + b.s =$$
$$a.(b.s + b.t) + b.(a.t + b.s) =$$
$$a.(b.(a.t + b.s) + b.t) + b.(a.t + b.s) = \dots$$

Алгебра поведений (процессов)

- Два сорта: **<*U*, *A*>**
  - ***U*** – поведения
  - ***A*** – действия
- Сигнатура:
  - **префиксинг** $a.u, a \in A, u \in u, (().()) : A \times U \to U$
  - **недетерминированный выбор** $u + v, u, v \in U, (() + ()) : U \times U \to U$
  - **константы** Δ, 0, $\perp$
  - **отношение аппроксимации** $\boldsymbol{u} \sqsubseteq \boldsymbol{v}$, $\sqsubseteq \subseteq U \times U$

$\sqsubseteq$

Аксиомы алгебры поведений

Недетерминированный выбор:

ассоциативно-коммутативная идемпотентная операция (aci)
с нейтральным элементом 0

$$(u+v)+w = u+(v+w),$$

$$u+v = v+u,$$

$$u+u = u,$$

$$u+0 = u$$

Отношение аппроксимации:

$\sqsubseteq$ есть частичный порядок на U с наименьшим элементом $\perp$

$$\forall (x \in U)(\perp \subseteq x)$$

Монотонность и непрерывность:

Операции префиксинга и недетерминированного выбора
монотонны и непрерывны (сохраняют $\perp$ наименьшие верхние грани)

Монотонность

$$\perp \sqsubseteq u$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow u + w \sqsubseteq v + w$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow a.u \sqsubseteq a.v$$

Непрерывность

Направленное множество

$$\forall(d', d'' \in D)\,\exists(d \in D)(d' \sqsubseteq d \wedge d'' \sqsubseteq d)$$

Наименьшая верхняя грань $\bigsqcup D, \bigsqcup_{d \in D} d$

Для счетных множеств достаточно рассматривать возрастающие цепочки

Непрерывность

$$a.\bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} a.d$$

$$u + \bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} (u + d)$$

Монотонность следует из непрерывности

непрерывность

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y \Rightarrow f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Предел последовательности

$x \sqsubseteq y \sqsubseteq y \sqsubseteq \; \ldots$

Дополнительные структуры:

Действия: комбинация действий $\times$, невозможное и нейтральное действия

Атрибуты: операция разметки поведений $\alpha : u$

Полная алгебра поведений *F(A)*

Всякое направленное множество имеет предел. Имеет место теорема о неподвижной точке.

**A.Letichevsky. Algebra of behavior transformations and its applications, in V.B.Kudryavtsev and I.G.Rosenberg eds. Structural theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra,
NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry – Vol. 207, pp. 241-272, Springer 2005.**