*28 Сентября 2011*

# Инсерционное моделирование 1

## Лекция 4

## Поведение транзиционных систем
## Распознавание эквивалентности

# Ответы на упражнения

Упражнение 1

$$s \xrightarrow{x_i/(y,right)} s' \Rightarrow (p, x_i, x_{i+1}q)[s] \xrightarrow{(y,right)} (py, x_{i+1}, q)[s']$$

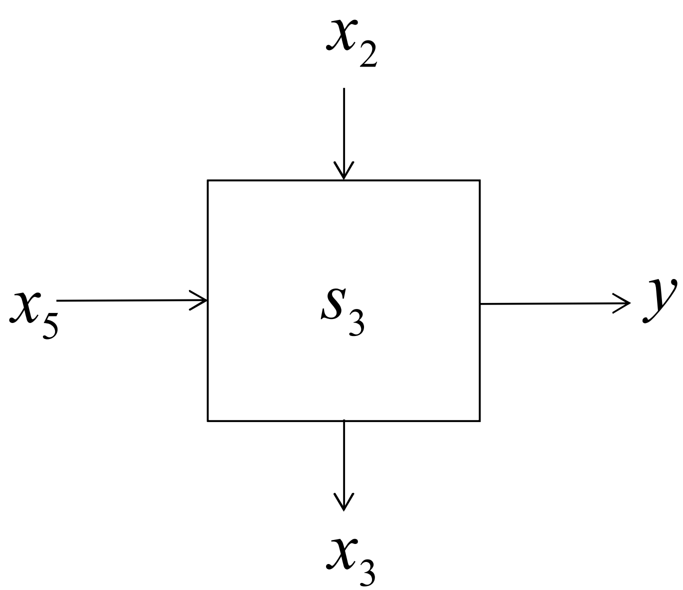
$$s \xrightarrow{x_i/(y,right)} s' \Rightarrow (p, x_i, \varnothing)[s] \xrightarrow{(y,right)} (py, empty, \varnothing)[s']$$

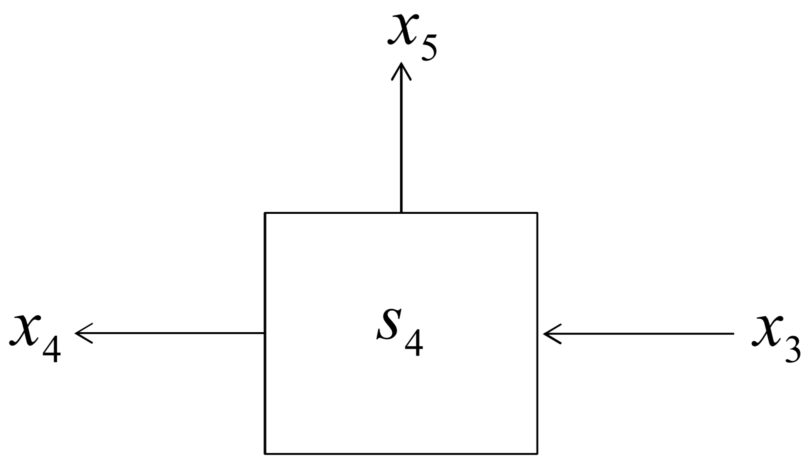
$$s \xrightarrow{x_i/(y,left)} s' \Rightarrow (px_{i-1}, x_i, q)[s] \xrightarrow{(y,left)} (p, x_{i-1}, yq)[s']$$

$$s \xrightarrow{x_i/(y,left)} s' \Rightarrow (\varnothing, x_i, q)[s] \xrightarrow{(y,left)} (\varnothing, empty, x_iq)[s']$$

# Ответы на упражнения

## Упражнение 2




$$s_3 \xrightarrow{(x_5, x_2)/(y', x_3')} s_3'$$

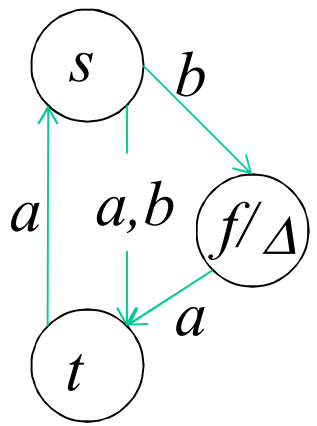
$$s_4 \xrightarrow{x_3/(x_4', x_5')} s_4'$$

# Поведение транзиционных систем

$S$ – транзиционная система, $s \in S$

$\mathbf{beh}(s) = u_s$ **определяется**, как наименьшее решение системы

$$\boxed{u_s = \sum_{s \xrightarrow{a} t} a.u_t + \varepsilon_s}$$




в алгебре $F(A)$

$$s \notin S_\Delta \cup S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = 0$$

$$s \in S_\Delta \setminus S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = \Delta$$

$$s \in S_\perp \setminus S_\Delta \Rightarrow \varepsilon_s = \perp$$

$$s \in S_\Delta \cap S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = \Delta + \perp$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_s &= a.u_t + b.u_t + b.u_f \\ u_t &= a_s \\ u_f &= a.u_t + \Delta \end{aligned}}$$

# Наименьшее решение системы уравнений

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), i = 1,2,\ldots m \qquad (1)$$

$f_i$ выражение алгебры поведений

$$x_i = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_i^{(n)}, \qquad (2)$$

$$x_i^{(0)} = \perp,$$

$$x_i^{(n+1)} = f_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$$

$$x_i^{(n)} \subset x_i^{(n+1)}$$

**Теорема о неподвижной точке:**
*Соотношение* (2) *определяет наименьшее решение системы* (1)

# Основная теорема

$$s \sim_B s' \Leftrightarrow \mathrm{beh}(s) = \mathrm{beh}(s')$$

# Транзиционная система, определяемая поведением

**Множество** $U \subset F(A)$ **называется транзиционно замкнутым, если**

$$a.u + v \in U \Rightarrow u \in U$$

**Замкнутое множество** $U$ **есть транзиционная система:**

$$a.u + v \xrightarrow{a} u$$

$$U_\Delta = \{u \mid u = u + \Delta\}$$

$$U_\perp = \{u \mid u = u + \perp\}$$

# Лемма 1

$$u \sim_B v \Leftrightarrow u = v$$

$u = v \Rightarrow u \sim_B v$ **Равенство есть отношение бисимуляции**

$u \sim_B v \Rightarrow u = v$

**Доказательство использует представление поведения в виде предела его конечных аппроксимаций**

$$\boxed{u_s = \sum_{s \xrightarrow{a} t} a.u_t + \varepsilon_s}$$

# Лемма 2 $u_s \sim_B s$

**Отношение бисимуляции:** $s \to u_s$
**сохраняет множества** $S_\Delta, S_\perp$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "a"] \arrow[d] & t \arrow[d, dashed] \\
u_s \arrow[r, dashed, "a"] & u_t
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d] & t \arrow[d, dashed] \\
u_s \arrow[r, "a"] & u_t
\end{tikzcd}$$

# Доказательство основной теоремы

$$s \sim_B s' \Leftrightarrow \mathrm{beh}(s) = \mathrm{beh}(s')$$

=>

$$beh(s) \sim_B s \sim_B s' \sim_B beh(s') \Rightarrow$$

$$beh(s) \sim_B beh(s') \Rightarrow$$

$$beh(s) = beh(s')$$

<=

$$s \sim_B beh(s) = beh(s') \sim_B s' => $$

$$s \sim_B s'$$

# Нормальная форма в алгебре $F(A)$

$$\boxed{u = \left(\sum_{i \in I} a_i . u_i\right) + \varepsilon_u}$$

Такое представление единственно, если все $a_i . u_i$ различны

# Алгебра размеченных поведений

$$< U, A, L >$$

**нормальная форма**

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i : u_i + \sum_{i \in J} a_j . u_j + \varepsilon_u$$

**Полная алгебра размеченных поведений: *F*(*A*,*L*)**

*Кибернетика 4, 2005*

# Распознавание бисимуляционной эквивалентности

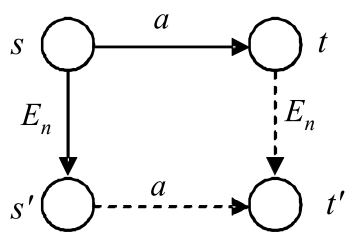
$$E_n, n = 0,1,2,...$$

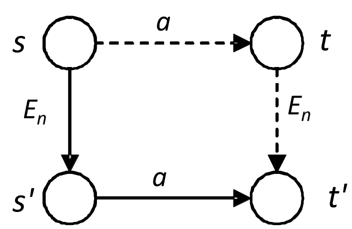
*Убывающая последовательность отношений эквивалентности (разбиений) на множестве состояний транзиционной системы* $S$.

1. $s \underset{0}{\sim} s' \Leftrightarrow (s \in S_\xi \Leftrightarrow s' \in S_\xi) \wedge I(s) = I(s'), \xi = \Delta, \perp$

   $I(s) = \{a \in A \mid \exists s'(s \xrightarrow{a} s')\}$

2. $s \underset{n+1}{\sim} s' \Leftrightarrow s \underset{n}{\sim} s'$ *и выполняются два условия бисимуляции:*



$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

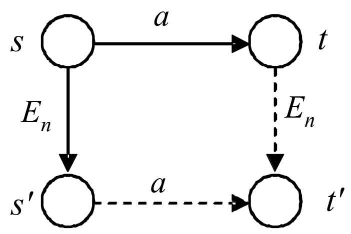
$E$ есть отношение бисимуляционной эквивалентности

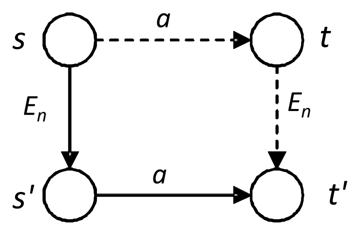
если $S$ конечна

конечное число состояний и переходов

если $S$ обладает конечным ветвлением:

из каждого состояния выходит конечное множество переходов, отмеченных одним и тем же символом




Для конечной системы при достаточно большом $n$

$$E_n = E$$

# *Упражнения*

1. *Доказать основную теорему для конечного ветвления.*
2. *Найти отношение эквивалентности для диаграммы на этом слайде.*
3. *Построить транзиционную систему и найти отношение эквивалентности для задачи «волк, коза и капуста»*