26 Сентября 2013

Инсерционное моделирование 1

Лекция 4

Алгебра поведений

Определение поведения

системы в заданном состоянии

Теоретико-множественное:

множество всех состояний системы, бисимуляционно эквивалентных заданному состоянию

Алгебраическое:

система уравнений в алгебре поведений

Геометрическое:

дерево поведения, порожденного заданным состоянием, в котором никакая вершина не имеет бисимуляционно эквивалентных наследников

Преимущество алгебраического подхода – возможность выполнять алгебраические преобразования

Сигнатура алгебры поведений (процессов)

Два сорта: $< U, A >$

- U – поведения
- A – действия

Операции:

- префиксинг $a.u, a \in A, u \in U, (().()) : A \times U \to U$
- недетерминированный выбор $u + v, u, v \in U, (() + ()) : U \times U \to U$
- константы $\Delta, 0, \perp$

Отношение аппроксимации $u \sqsubseteq v, (() \sqsubseteq ()) \subseteq U \times U$

$a.u$ система выполняет a и переходит в u

$u + v$ система производит недетерминированный выбор

Δ система останавливается в заключительном состоянии

0 система находится в тупиковом состоянии

$\perp$ система находится в неопределенном состоянии

Аксиомы алгебры поведений

Недетерминированный выбор:
ассоциативно-коммутативная идемпотентная операция (aci)
с нейтральным элементом 0

$$(u+v)+w = u+(v+w),$$

$$u+v = v+u,$$

$$u+u = u,$$

$$u+0 = u$$

Отношение аппроксимации:
$\sqsubseteq$ есть частичный порядок на U с наименьшим элементом $\perp$

$$\forall (x \in U)(\perp \sqsubseteq x)$$

Монотонность и непрерывность:
Операции префиксинга и недетерминированного выбора
монотонны и непрерывны (сохраняют наименьшие верхние грани)

Монотонность

$$\perp \sqsubseteq u$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow u + w \sqsubseteq v + w$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow a.u \sqsubseteq a.v$$

Непрерывность

Направленное множество

$$\forall (d', d'' \in D)\, \exists (d \in D)(d' \sqsubseteq d \wedge d'' \sqsubseteq d)$$

Наименьшая верхняя грань $\bigsqcup D, \bigsqcup_{d \in D} d$

Для счетных множеств достаточно рассматривать возрастающие цепочки

Непрерывность

$$a.\bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} a.d$$

$$u + \bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} (u + d)$$

Монотонность следует из непрерывности

непрерывность

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y \Rightarrow f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Предел последовательности
$x \sqsubseteq y \sqsubseteq y \sqsubseteq \ \ldots$

Дополнительные структуры:

Действия: комбинация действий $\times$, невозможное и нейтральное действия

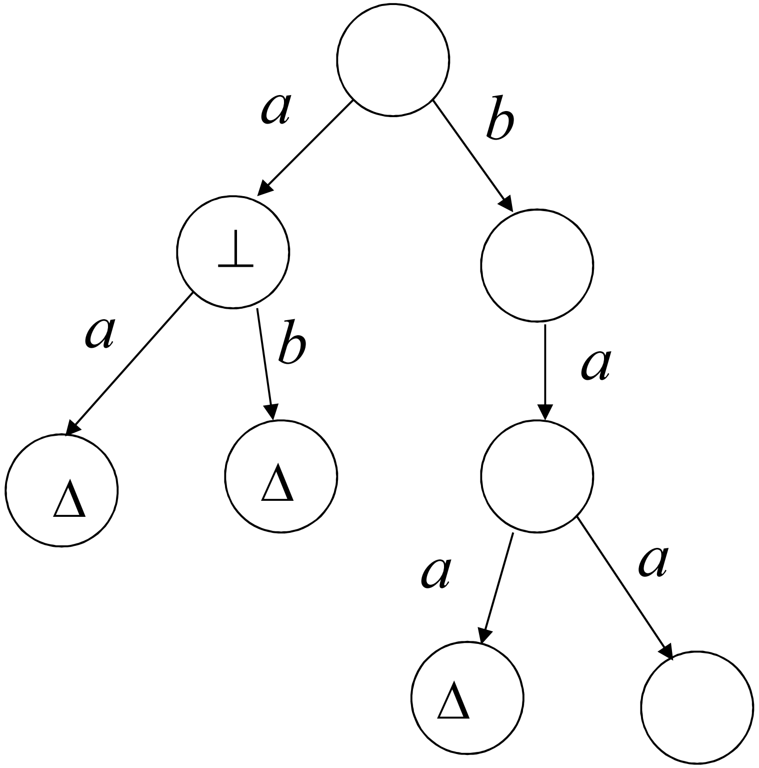
Атрибуты: операция разметки поведений $\alpha : u$

Полная алгебра поведений *F(A)*

Всякое направленное множество имеет предел. Имеет место теорема о неподвижной точке.

A.Letichevsky. Algebra of behavior transformations and its applications, in V.B.Kudryavtsev and I.G.Rosenberg eds. Structural theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry – Vol. 207, pp. 241-272, Springer 2005.

Конечные поведения



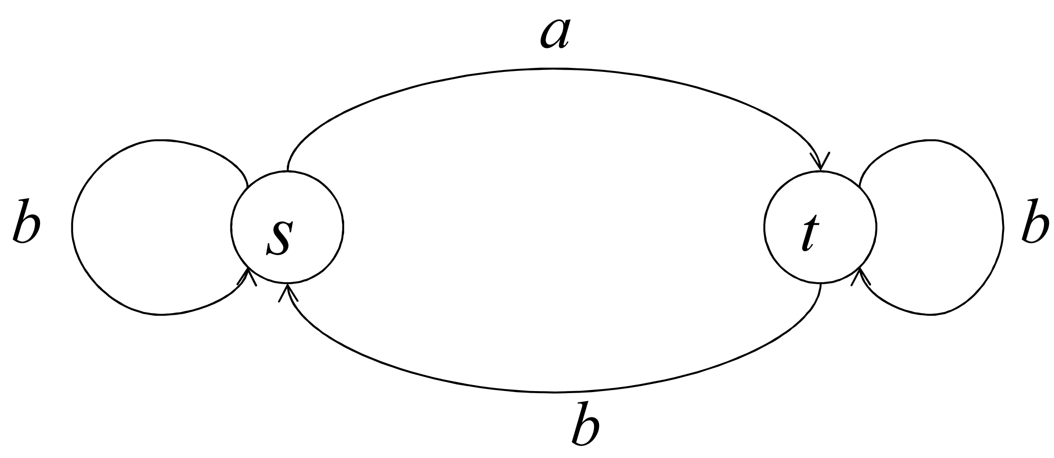
$$a.(a+b+\perp)+b.a.(a+a.0)$$

$$a.\,\Delta = a$$

Бесконечные поведения

$$s = a.t + b.s$$

$$t = b.s + b.t$$

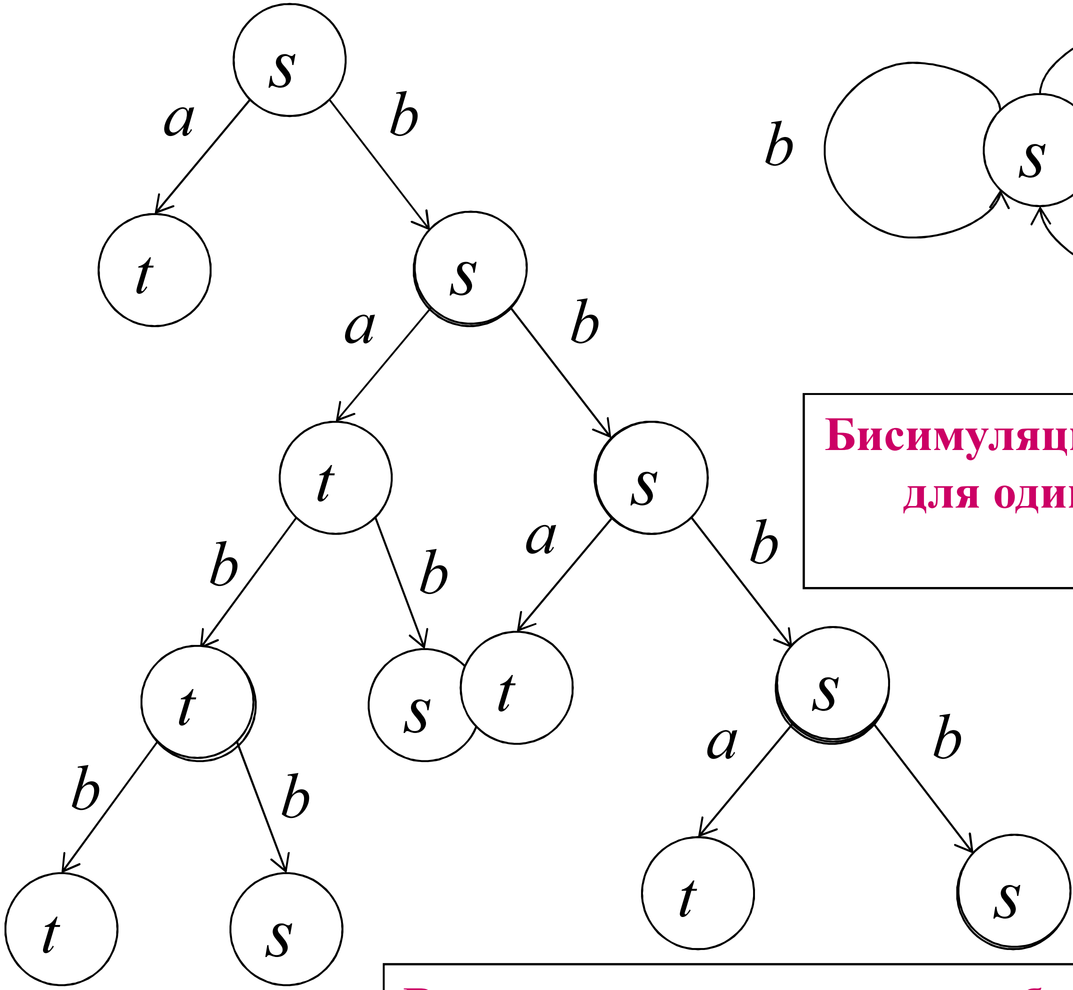


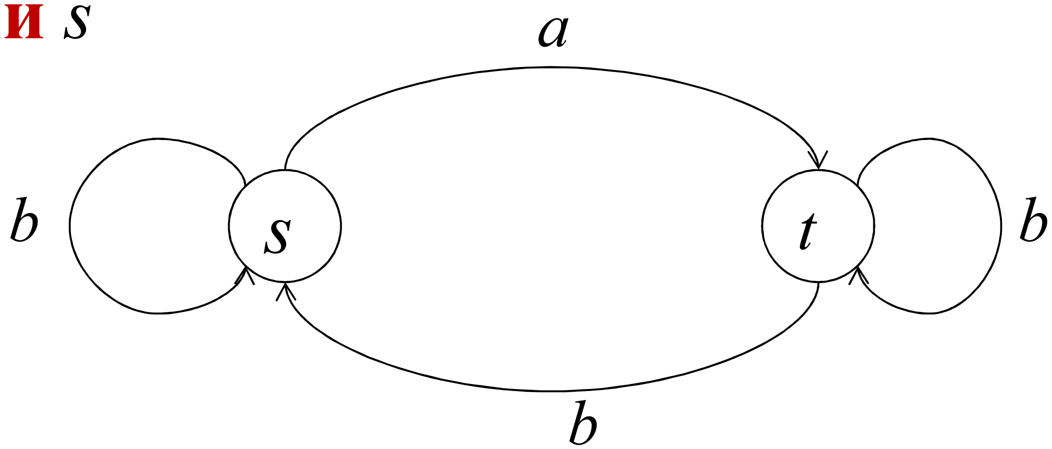
$$s = a.t + b.s = a.(b.s + b.t) + b.s =$$

$$a.(b.s + b.t) + b.(a.t + b.s) =$$

$$a.(b.(a.t + b.s) + b.t) + b.(a.t + b.s) = \ldots$$

Геометрическое определение поведения системы в состоянии *s*





Бисимуляционно эквивалентные наследники для одинаковых отметок склеиваются (идемпотентность)

В двух состояниях система обладает одинаковым поведением <=> эти состояния бисимуляционно эквивалентны