10 Октября 2013

Инсерционное моделирование 1

Лекция 6

Обогащенная алгебра поведений

Обогащенная алгебра поведений

$$a.u \qquad u+v$$

Последовательная и параллельная композиции, итерация

$$(u;v),\ (u\,||\,v),\ u^*$$

Последовательная композиция поведений

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{(u;v) \xrightarrow{a} (u';v)}$$

$$((u+\Delta);v) = (u;v) + v$$

$$((u+\perp);v) = (u;v) + \perp$$

$$(0;u) = 0$$

Обозначение

$$(u;v)=uv$$

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{uv \xrightarrow{a} u'v}$$

$$(u+\Delta)v = uv + \Delta$$

$$(u+\perp)v = uv + \perp$$

$$0u = 0$$

S – ***алгебра поведений обогащенная последовательной композицией***

$$F(A) \subseteq S, (u, v \in S) \Rightarrow uv \in S$$

$$u \in S_\varepsilon \Leftrightarrow u = u' + \varepsilon, (\varepsilon = \Delta, \perp)$$

Упражнение: Доказать тождества:

$$\Delta u = u\Delta = u$$

$$\perp u = \perp$$

$$(uv)w = u(vw)$$

$$(u+v)w = uw + vw$$

Подсказка: определить отношение бисимуляции на множестве состояний системы S

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{uv \xrightarrow{a} u'v}$$

$$(u+\Delta)v = uv + v$$

$$(u+\perp)v = uv+\perp$$

$$0u = 0$$

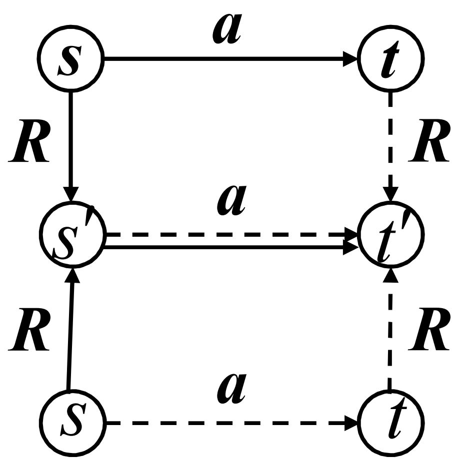
B1. $(s,s') \in R \Rightarrow (s \in S_\Delta \Leftrightarrow s' \in S_\Delta, s \in S_\perp \Leftrightarrow s' \in S_\perp)$

B2. $(s,s') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t \Rightarrow \exists t'((t,t') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t')$

B3. $(s,s') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists t((t,t') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t)$

$$u \in S_\varepsilon \Leftrightarrow u = u' + \varepsilon, (\varepsilon = \Delta, \perp)$$

Леммы



$$uv \in S_\Delta \Leftrightarrow u \in S_\Delta \wedge v \in S_\Delta$$

$$uv \in S_\perp \Leftrightarrow u \in S_\perp \vee u \in S_\Delta \wedge v \in S_\perp$$

Если R симметрично, то из B2 следует B3

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{uv \xrightarrow{a} u'v}\text{(A1)}$$

$$(u+\Delta)v = uv + v\text{(A2)}$$

$$(u+\perp)v = uv + \perp\text{(A3)}$$

$$0u = 0\text{(A4)}$$

B1. $(s,s') \in R \Rightarrow (s \in S_\Delta \Leftrightarrow s' \in S_\Delta, s \in S_\perp \Leftrightarrow s' \in S_\perp)$

B2. $(s,s') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t \Rightarrow \exists t'((t,t') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t')$

B3. $(s,s') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists t((t,t') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t)$

$$\Delta u = u\Delta = u$$

$$\text{A2, A4} \Rightarrow \Delta u = u$$

$$R = \bigcup_{u \in F(A)} \{u, u\Delta\}^2$$

B1: $u \in S_\Delta \Rightarrow u\Delta = (u'+\Delta)\Delta = u'\Delta + \Delta \in S_\Delta \Rightarrow u\Delta \in S_\Delta$

....

B2:

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "a"] \arrow[d, "R"'] & v \arrow[d, dashed, "R"] \\
u\Delta \arrow[r, dashed, "a"] & v\Delta
\end{tikzcd}$$

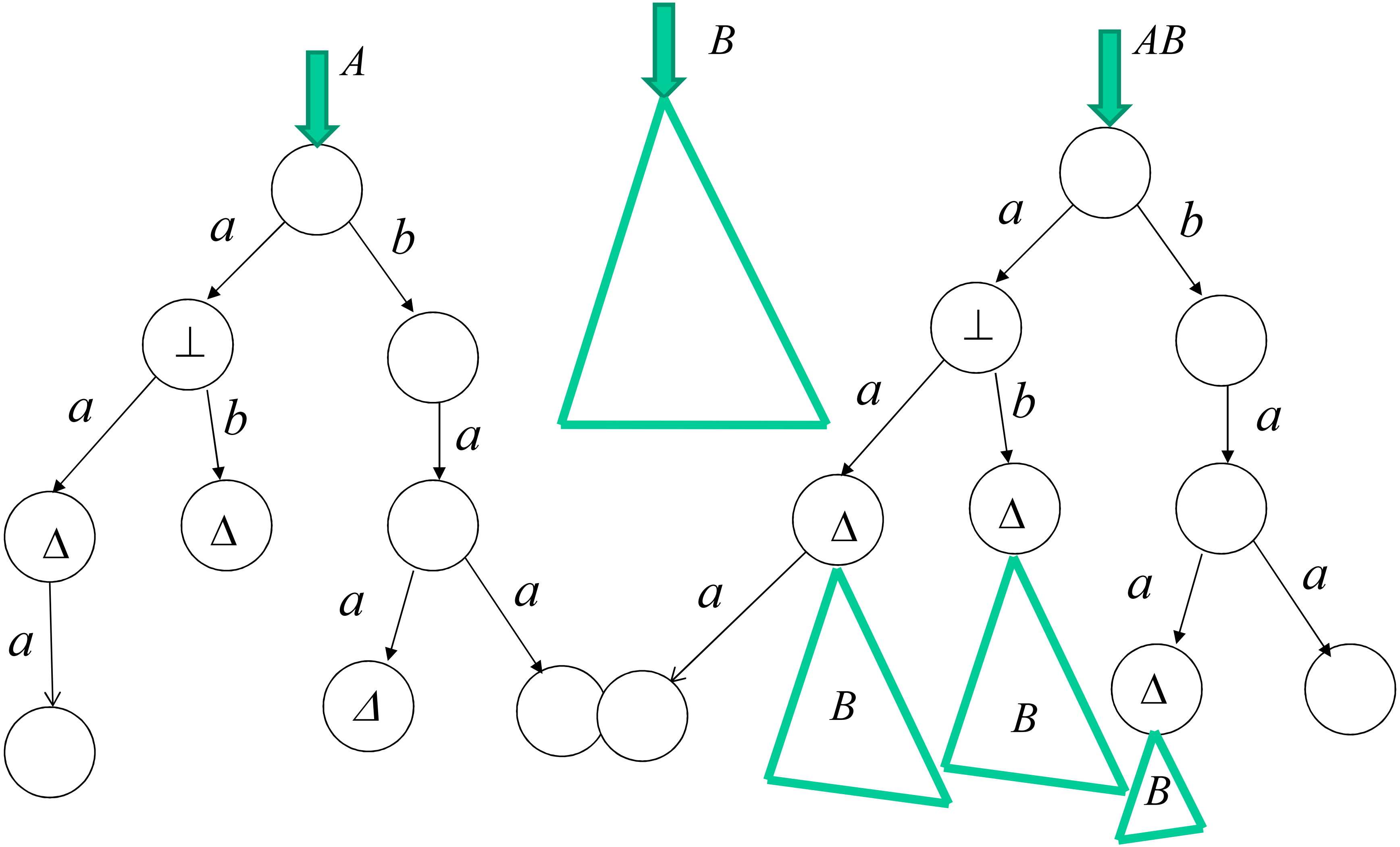
Явное определение последовательной композиции

$$uv = \sum_{u \xrightarrow{a} u'} a.(u'v) + \sum_{u=u+\varepsilon} \varepsilon v$$

$$0v = 0, \Delta v = v, \perp v = \perp$$

$$a = a.\Delta = (a;\Delta) = a\Delta$$

Геометрическое определение



Параллельная асинхронная композиция
(интерливинг)

Правила интерливинга:

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{u \,\|\, v \xrightarrow{a} u' \,\|\, v} \qquad \frac{v \xrightarrow{b} v'}{u \,\|\, v \xrightarrow{b} u \,\|\, v'}$$

$$\frac{u \xrightarrow{a} u'}{u \,\|\, (v + \Delta) \xrightarrow{a} u'} \qquad \frac{v \xrightarrow{b} v'}{(u + \Delta) \,\|\, v \xrightarrow{b} u \,\|\, v'}$$

Правила для терминальных констант:

$$(u + \Delta) \,\|\, (v + \Delta) = (u + \Delta) \,\|\, (v + \Delta) + \Delta$$

$$(u + \perp) \,\|\, v = (u + \perp) \,\|\, v + \perp$$

$$u \,\|\, (v + \perp) = u \,\|\, (v + \perp) + \perp$$

Синхронизация (комбинация) действий

Комбинация действий:
ассоциативная коммутативная операция $a \times b$ с аннулятором $\varnothing$
и соотношениями: $a \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing . u = 0$

Правило синхронизации:

$$\frac{u \xrightarrow{a} u', v \xrightarrow{b} v', a \times b \neq \varnothing}{u \parallel v \xrightarrow{a \times b} u' \parallel v'}$$

Правила для терминальных констант:

$$(u + \Delta) \parallel (v + \Delta) = u \parallel v + \Delta$$

$$(u + \perp) \parallel v = u \parallel (v + \perp) = u \parallel v + \perp$$

Общая параллельная композиция

синхронизация

$$\frac{u \xrightarrow{a} u', v \xrightarrow{b} v', a \times b \neq \varnothing}{u \parallel v \xrightarrow{a \times b} u' \parallel v'}$$

интерливинг

$$\frac{u \xrightarrow{a} u', v \xrightarrow{b} v'}{u \parallel v \xrightarrow{a} u' \parallel v, u \parallel v \xrightarrow{b} u \parallel v', u \parallel (v + \Delta) \xrightarrow{a} u', (u + \Delta) \parallel v \xrightarrow{b} v'}$$

$$(u + \Delta) \parallel (v + \Delta) = (u + \Delta) \parallel (v + \Delta) + \Delta$$

$$(u + \bot) \parallel v = (u + \bot) \parallel v + \bot$$

$$u \parallel (v + \bot) = u \parallel (v + \bot) + \bot$$

Упражнение

Доказать ассоциативность и коммутативность параллельной композиции.

$$(u \parallel v) \parallel w = u \parallel (v \parallel w)$$

$$u \parallel v = v \parallel u$$

бисимуляция

Явное определение параллельной композиции
(теорема о разложении)

$$u \parallel v = \sum_{\substack{u \xrightarrow{a} u' \\ v \xrightarrow{b} v'}} (a \times b).(u' \parallel v') + \sum_{u \xrightarrow{a} u'} a.(u' \parallel v) + \sum_{v \xrightarrow{b} v'} b.(u \parallel v') + (\varepsilon_u \parallel \varepsilon_v)$$

$$\varepsilon \parallel \varepsilon' = \varepsilon' \parallel \varepsilon$$

$$\varepsilon \parallel \Delta = \varepsilon$$

$$\varepsilon \parallel \perp = \perp$$

$$0 \parallel \Delta = 0 \parallel 0 = 0$$

Итерация

$$u^* = uu^* + \Delta$$