12 Марта 2010

Инсерционное моделирование 1

Лекция 4

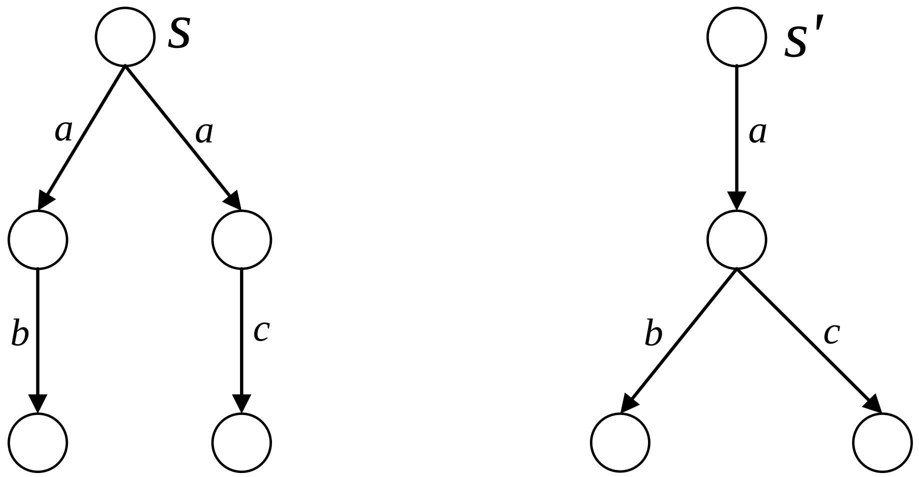
Бисимуляционная эквивалентность

http://apsystem.org.ua/lectures.html

Поведение транзиционной системы:
множество последовательностей действий, которые она может совершить (?)

$$s \sim_T t \Leftrightarrow L(s) = L(t)$$

Трассовая эквивалентность слишком слаба:



Бисимуляционная эквивалентность
bisimilarity (Milner 1980, D.Park 1981)

Отношение бисимуляции (bisimulation): $R \subseteq S^2$

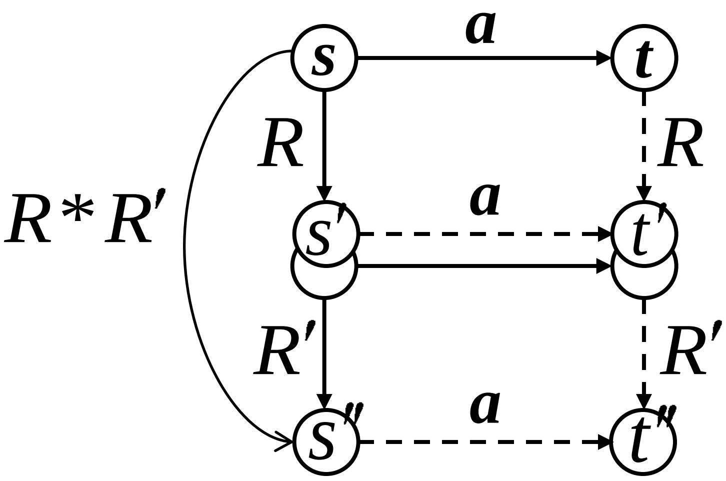
1. $(s,s') \in R \Rightarrow (s \in S_\Delta \Leftrightarrow s' \in S_\Delta, s \in S_\perp \Leftrightarrow s' \in S_\perp)$
2. $(s,s') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t \Rightarrow \exists t'((t,t') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t')$
3. $(s,s') \in R \wedge s' \xrightarrow{a} t' \Rightarrow \exists t((t,t') \in R \wedge s \xrightarrow{a} t)$

bisimulation => bisimilarity

s и s' бисимуляционно эквивалентны

$$s \sim_B s' \Leftrightarrow \exists(\text{бисимуляция } R)((s, s') \in R)$$

Бисимуляционная эквивалентность есть эквивалентность



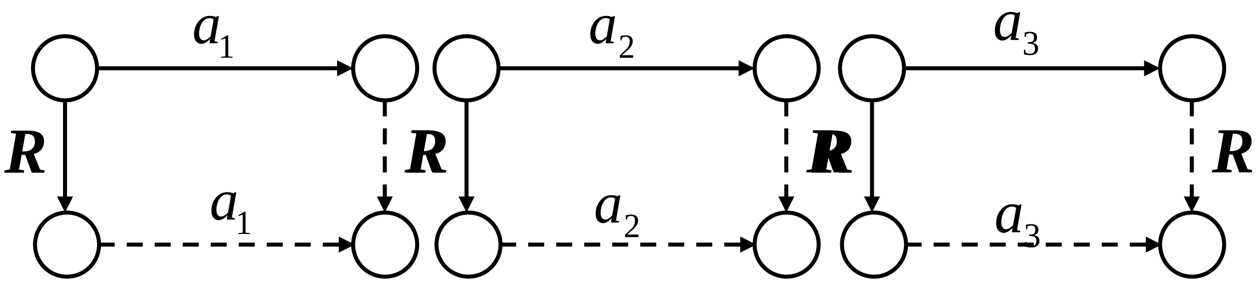
Бисимуляционная эквивалентность состояний совпадает с максимальной бисимуляцией на *S*.

Бисимуляционная эквивалентность систем

Отношение бисимуляции распространяется на состояния разных систем.

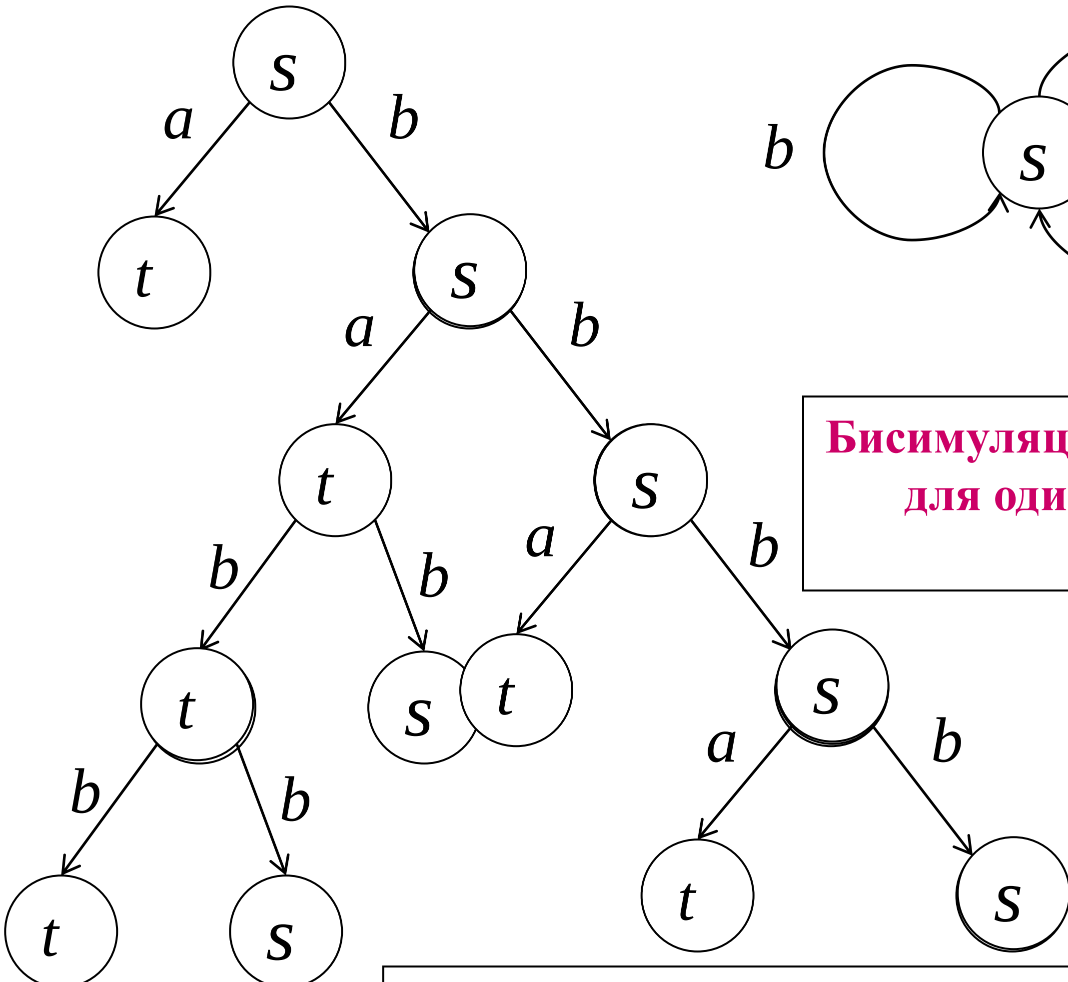
$$S \sim_B S' \Leftrightarrow$$
$$\forall (s \in S) \exists (s' \in S')(s \sim_B s') \wedge$$
$$\forall (s' \in S') \exists (s \in S)(s' \sim_B s)$$

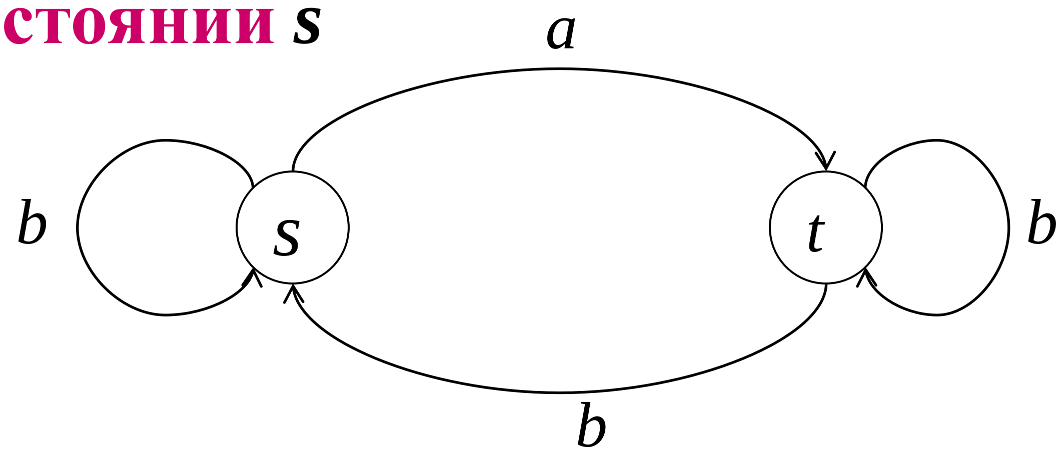
Для детерминированных систем бисимуляционная эквивалентность состояний совпадает с трассовой: $L(s)=L(s')$ **есть бисимуляция.**



ПОВЕДЕНИЕ

системы в состоянии *s*

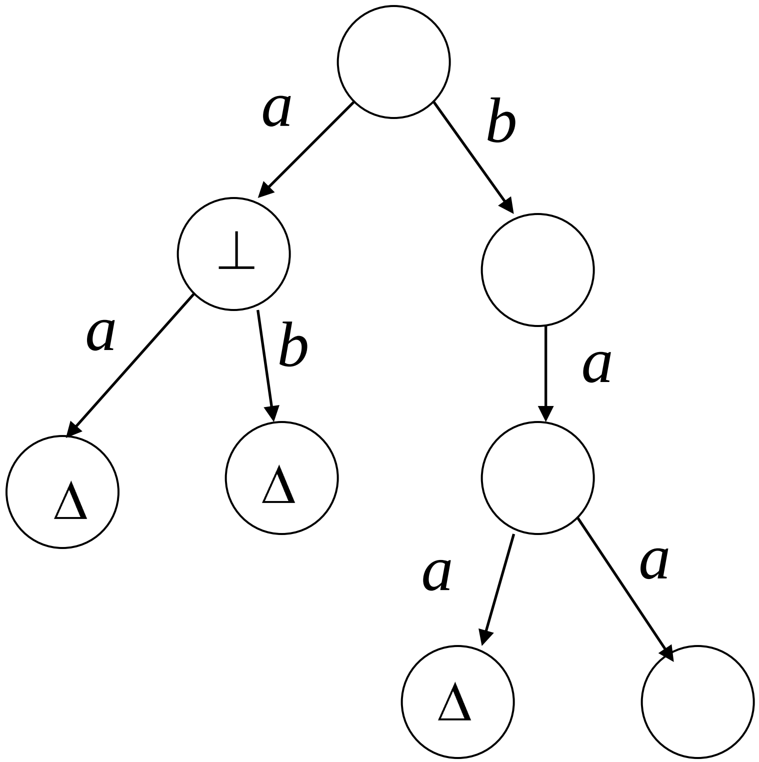




Бисимуляционно эквивалентные наследники для одинаковых отметок склеиваются (идемпотентность)

В двух состояниях система обладает одинаковым поведением <=> эти состояния бисимуляционно эквивалентны

Алгебра поведений



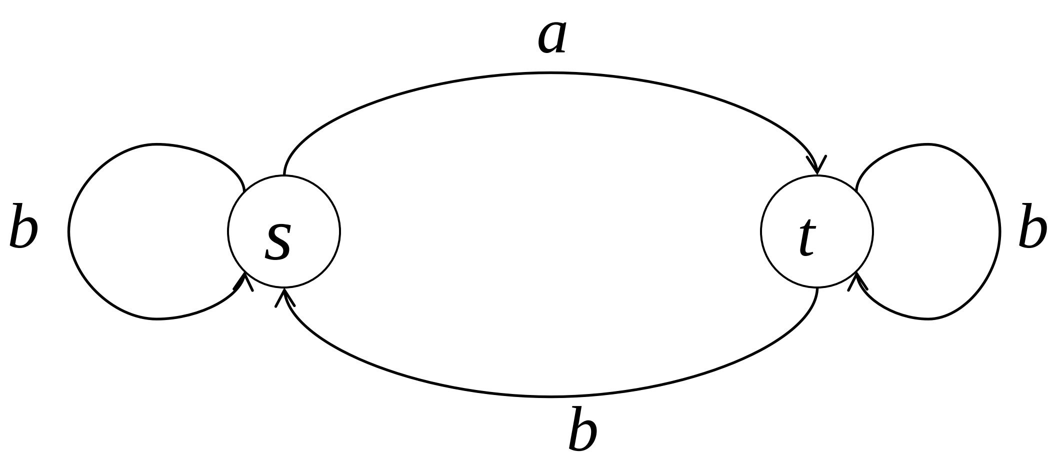
$$a.(a+b+\perp)+b.a.(a+a.0)$$

$$a.\,\Delta = a$$

Бесконечные поведения

$$s = a.t + b.s$$

$$t = b.s + b.t$$



$$s = a.t + b.s = a.(b.s + b.t) + b.s =$$

$$a.(b.s + b.t) + b.(a.t + b.s) =$$

$$a.(b.(a.t + b.s) + b.t) + b.(a.t + b.s) = \ldots$$

Алгебра поведений (процессов)

- **Два сорта: <*U*, *A*>**
  - ***U* – поведения**
  - ***A* – действия**
- **Сигнатура:**
  - **префиксинг *a.u*,** $a \in A, u \in U$
  - **недетерминированный выбор *u* + *v*,** $u, v \in U$
  - **константы** Δ, 0, $\perp$
  - **отношение аппроксимации** $\sqsubseteq$
- **Аксиомы:**
  - **aci для недетерминированного выбора**
  - 0 **есть нейтральный элемент недетерминированного выбора**
  - $\sqsubseteq$ **есть отношение частичного порядка с наименьшим элементом** $\perp$
  - **Обе операции монотонны и непрерывны (сохраняют наименьшие верхние грани)**

Дополнительные структуры:

Действия: комбинация действий $\times$, невозможное и нейтральное действия

Атрибуты: операция разметки поведений $\alpha : u$

Полная алгебра поведений *F(A)*

Всякое направленное множество имеет предел. Имеет место теорема о неподвижной точке.

A.Letichevsky. Algebra of behavior transformations and its applications, in V.B.Kudryavtsev and I.G.Rosenberg eds. Structural theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry – Vol. 207, pp. 241-272, Springer 2005.

Монотонность

$$\perp \sqsubseteq u$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow u + w \sqsubseteq v + w$$

$$u \sqsubseteq v \Rightarrow a.u \sqsubseteq a.v$$

Непрерывность

Направленное множество

$$\forall (d', d'' \in D)\, \exists (d \in D)(d' \sqsubseteq d \wedge d'' \sqsubseteq d)$$

Наименьшая верхняя грань $\bigsqcup D, \bigsqcup_{d \in D} d$

Для счетных множеств достаточно рассматривать возрастающие цепочки

Непрерывность

$$a.\bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} a.d$$

$$u + \bigsqcup D = \bigsqcup_{d \in D} (u + d)$$

Монотонность следует из непрерывности

непрерывность

$$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqcup y = y \Rightarrow f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y) = f(y) \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

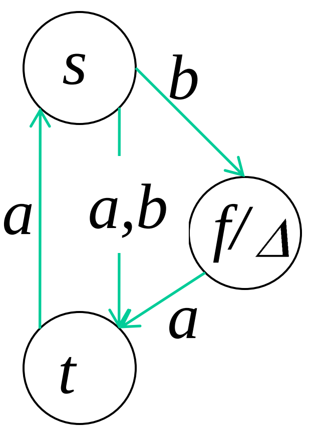
Предел последовательности

$x \sqsubseteq y \sqsubseteq y \sqsubseteq \;\; \ldots$

Поведение транзиционных систем

S – транзиционная система, $s \in S$

$\mathbf{beh}(s) = u_s$ определяется, как наименьшее решение системы



$$\boxed{u_s = \sum_{s \xrightarrow{a} t} a.u_t + \varepsilon_s}$$

$$u_s = a.u_t + b.u_t + b.u_f$$

$$u_t = a_s$$

$$u_f = a.u_t + \Delta$$

$$s \notin S_\Delta \cup S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = 0$$

$$s \in S_\Delta \setminus S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = \Delta$$

$$s \in S_\perp \setminus S_\Delta \Rightarrow \varepsilon_s = \perp$$

$$s \in S_\Delta \cap S_\perp \Rightarrow \varepsilon_s = \Delta + \perp$$

Транзиционная система, определяемая поведением

Множество $U \subset F(A)$ называется транзиционно замкнутым, если

$$a.u + v \in U \Rightarrow u \in U$$

Множество U есть транзиционная система:

$$a.u + v \xrightarrow{a} u$$

$$U_{\Delta} = \{u \mid u = u + \Delta\}$$

$$U_{\perp} = \{u \mid u = u + \perp\}$$

Каноническая форма в алгебре $F(A)$

$$\boxed{u = \left(\sum_{i \in I} a_i . u_i\right) + \varepsilon_u}$$

Такое представление единственно, если все $a_i . u_i$ различны

$$s \sim_B s' \Leftrightarrow \mathrm{beh}(s) = \mathrm{beh}(s')$$

<= равенство поведений есть бисимуляция

$\Rightarrow$использовать отношение аппроксимации.

для конечных – каноническая форма + индукция

Теорема о неподвижной точке
(для возможно бесконечного ветвления)

Добавление переменных: $F(A, X)$

$$x_i = f_i(X), i \in I,$$
$$f_i(X) \in F(A, X)$$

$$x_i = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_i^{(n)},$$

$$x_i^{(0)} = \perp,$$

$$x_i^{(n+1)} = (f_i(X))\sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1} = \{x_i := x_i^{(n)} \mid i \in I\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_i &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ x_i^{(n+1)} &= f_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \end{aligned}}$$

Алгебра размеченных поведений

$$< U, L, A >$$

нормальная форма

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i : u_i + \sum_{i \in J} a_j . u_j + \varepsilon_u$$

Кибернетика 4, 2005