УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Введение

1

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить *инструментальные средства для конструирования процедур вида*

$$y_n = procedure_D_i(\ f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ = \quad (1)$$

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,. \quad (2)$$

Процедура $procedure_D_i$ преобразует задачу Коши типа D_i — систему из обыкновенного дифференциального уравнения типа D_i и начальных условий

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,, \quad (3)$$

$$init_cond(y, d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,, \ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \} \quad (4)$$

в алгебраический полином порядка n и основана на τ - методе Ланцоша [2].

Погрешность $y(x) - y_n(x)$ *аппроксимации полиномом* $y_n(x)$ *(2) функции*

$$(\ y(x)\ ,\ x \in [a, b]\ ) = solve(\ f(x, y, \ldots, y^{(k)}) = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ y = ?\ )$$

"близка" к величине наилучшего приближения функции $y(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* n*. Эта погрешность удовлетворяет требования к точности математической модели. Эта модель имеет задачу Коши (3), (4).*

2. Актуальность задачи

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задача Коши для обыкновенных дифференциалтных уравнений (3), (4) является классическим аппаратом для создания математических моделей [2].

Если математическая модель имеет функциональное уравнение $F[y] = 0$, то ее исследование, обычно, включает операцию *решение уравнения* $F[y] = 0$.

Алгебраический полином $y_n(x)$ (2) — предпочтительный для СКА вид аппроксимации функции $y(x)$, $x \in [a, b]$ — решения уравнения $F[y] = 0$.

СКА вычисляют решение задачи Коши (3), (4) в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

τ - Метод Ланцоша [2] имеет алгебраические преобразования. Их выполняют СКА. По τ - методу преобразуют в полином y_n (2) задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,. \tag{5}$$

3. Метод 1 создания инструментальных средств

1. Построить процедуру системы APS реализующую алгоритмизацию τ - метода Ланцоша [2]. Эта алгоритмизация основана на a - методе [3] и имеет уравнение

$$y_n = solve(\, A \cdot y_n^{(k)} + D[y_n] + G + \tau_1 \cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z) = 0\,,$$

$$init_cond(y_n, d)\,, \quad y_n \in P_n = ?\,,\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-p} = ?\,)\,, \qquad \text{где} \quad p = n - k\,, \tag{6}$$

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n\,,\ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0, \ldots, c_n\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,, \qquad z = 2 \cdot (x - a)/(b - a) - 1\,.$$

2. На основании этой процедуры и классических методов [4], [5] аппроксимации уравнений и функций построить процедуры системы APS для решения задачи Коши для ЛДУМК (5) дополненных одним слагаемым вида:

$H \cdot y^{(i)}$, $H \cdot y$, H, где H — решение задачи Коши для ЛДУМК,

$f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ — полином или композиция функций системы APS.

3. Построить метод создания процедуры системы APS для решения задачи Коши для уравнения вида (5) дополненного слагаемым $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$. Его коэффициенты — композиция полиномов и решений задачи Коши для ЛДУМК.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 1

СКА и классические приближенные методы

1. Задача

Оценить эффективность использования программного обеспечения и приближенных методов (классических) для решения следующей задачи.

Задача 1. *Построить процедуру системы APS (системы алгебраического программмирования) [1] или другой системы компьютерной алгебры* (СКА)

$$procedure_D_i(\ f(x,y,y'\ldots,y^{(k)})=0\,,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ = \qquad (1)$$

$$y_n\ =\ c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n\ . \qquad (2)$$

Такая процедура преобразует в полином (2) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения типа D_i *— систему уравнений (1).*

Погрешность $y(x)-y_n(x)$ *аппроксимации полиномом* $y_n(x)$ *(2) функции*

$$(\ y(x)\ ,\ x\in[a,b]\ )=solve(\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})=0\,, \qquad (3)$$

$$init_cond(y,d)\ =\ \{\ y(d)=Y_0\,,\ y'(d)=Y_1\,,\ldots,\ y^{(k-1)}(d)=Y_{k-1}\ \}\ )\,. \qquad (4)$$

удовлетворяет требования к точности математической модели.

Эта модель включает задачу Коши (3), (4).

2. Актуальность задачи

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4)

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y, d) \;=\; \{\; y(d) = Y_0\,,\; y'(d) = Y_1\,, \ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\;\}\;)$$

является классическим аппаратом для создания математических моделей [2],...

Если математическая модель имеет функциональное уравнение $F[y] = 0$, то ее исследование, обычно, влючает операцию *решение уравнения* $F[y] = 0$.

СКА вычисляют решение задачи Коши (3), (4) в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко [3].
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения задачи Коши (3), (4) — $y(x)\,,\; x \in [a, b]$ предпочтительный для СКА.

СКА имеют эффективные инструментальные средства для выполнения и программирования алгебраических преобразований алгебраических полиномов (2).

3. Метод решения задачи

1. Определить требования СКА :
   — к методам и программам для решения задачи Коши (3), (4) и
   — к типу данных на входе и на выходе программы (и метода).
2. Оценить соответствие этим требованиям классических программ.
3. Оценить соответствие этим требованиям классических методов [2] — [7].

4. Источники для решения задачи

1. Программное обеспечение для решения задачи Коши (3), (4) [7].
2. Приближенные методы для решения задачи Коши (3), (4) [2] — [7].

5. Требование СКА к типу данных и к преобразованию

Операторы СКА символьно преобразуют математические функции этой системы (СМФ) и их композиции — дифференцируют, интегрируют и ....

Алгебраическое преобразование

$$y_n(x) + z_n(x)\,, \quad y_n(x) \cdot z_n(x)\,, \quad d/dx\, y_n(x)\,, \quad \int y_n(x)\, dx \ , \ldots$$

имеет конечное число правил и конечную стратегию применения этих правил.

СКА имеют наибольшее число операторов преобразующих полиномы вида (2)

$$y_n = y_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ .$$

Следовательно. Справедливо следующее утверждение и следующее требование.

Вывод 1. *СКА имеют эффективные инструментальные средства для выполнения алгебраических преобразований алгебраических полиномов (2).*

Требование 1. *Вход и выход преобразования СКА есть композиция типов данных этой СКА. Преимущество имеют алгебраические полиномы (2).*

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то СКА выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляют результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то СКА выполняют это преобразование без погрешностей.

Поэтому требование 1 имеет следующее дополнение.

Требование 1'. *Вход и выход преобразования СКА есть композиция типов данных этой СКА. Преимущество имеют алгебраические полиномы (2). Коэффициенты этих полиномов — рациональные числа.*

Система APS [1] имеет эффективные средства для программирования линейных алгебраических преобразований полиномов (2).

Следовательно. Справедливо следующее утверждение и следующее требование.

Требование 2. *Преобразование программируемое для СКА — алгебраическое* (имеет конечное число правил и конечную стратегию применения этих правил).

Вывод 2. *СКА имеют эффективные инструментальные средства для программирования линейных дифференциальных преобразований полиномов*

$$D[y] = A \cdot y^{(k)} + B \cdot y^{(k-1)} + \cdots + C \cdot y \ : \ P_n \ \rightarrow \ P_m = \{ c_0 + \cdots + c_m \cdot x^m \}.$$

6. Требование СКА к входу и выходу процедуры

Согласно требованию 1, предпочтительный для СКА вид выхода процедуры для решения задачи Коши (3), (4) — алгебраический полином (2). Следовательно. Как правило, справедливо.

Требование 3. *Процедура СКА для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) имеет:*

— вход — задача Коши, отрезок аппроксимации и $n \in N$ *(1)*

$$(f(x, y, \ldots, y^{(k)}) = 0 \ , \ init_cond(y, d) \ , \ [a, b] \ , \ n \ ) \, ,$$

— выход — полином (2)

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ .$$

Согласно этому требованию.

Мы будем рассматривать только такие методы решения задачи Коши (3), (4), выход которых можно преобразовать в алгебраический полином (2) и это преобразование имеет обратное.

7. Требование СКА к алгебраическим многочленам

Оператор СКА U (дифференцирования, интегрирования, приведения к специальному виду, ...) преобразует алгебраический полином (2)

$$y_n = y_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

порядка $n \le N$, где N определяет оператор U — $N = N(U)$.

Если порядок n алгебраического полинома y_n растет, то сложность Q (и время) преобразования оператором U этого полинома возрастает.

Обычно, этот рост полиномиальный

$$Q(\ U[y_n]\ ) = O(n^s) \ \text{ и, часто, } \ Q(\ U[y_n]\ ) = O(2^n) \quad \text{или} \quad Q(\ U[y_n]\ ) = O(n^n)\ .$$

Следовательно. Для СКА естественно следующее требование к полиномам (2).

Требование 4. *Если оператор U СКА преобразует полином y_n — аппроксимацию функции $y(x)$, то порядок этого полинома $n \le N(U)$ и полином y_n — "хорошая" аппроксимация функции y в пространстве X.*

8. Требование к аппроксимации в моделировании

В математических моделях часто используют функции

$$y(x)\ ,\quad x \in [a,b]\ .$$

Эти функции, обычно, задают следующими способами.

1. Функция есть композиция математических функций СКА (СМФ).
2. Функция есть решение функционального уравнения

$$(\ y(x)\ ,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\ ,\ y = ?\ )\ .$$

Классическое требование математического моделирования.

Требование 5. *Если функция* $y(x)$ *— элемент математической модели и эту функцию аппроксимируют полиномом (2)*

$$y_n = y_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,$$

то точность (качество) этой аппроксимации достаточна для исследования этой математической модели.

9. Оценка качества аппроксимации функции

Критерий точности математической модели определяет на множестве функций $y(x)\,,\ x \in [a,b]$ **расстояние** между этими функциями — определяет **метрику пространства** X **функций** $y(x)\,,\ x \in [a,b]\,.$

Обычно $X = C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,,\ \ldots$ — линейное нормированное пространство.

Расстояние в линейном нормированном пространстве определяет норма.

Точность (качество) аппроксимации элемента линейного нормированого пространства $X = C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,,\ \ldots$ — функции $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ — полиномом $y_n(x)$ (2), обычно, оценивает

норма в пространстве X *погрешности аппроксимации*

$$\|y(x) - y_n(x)\|_X \ = \ \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X\ . \tag{6}$$

Если математическая модель имеет задачу Коши (3), (4)

$$\{\ \ldots,\ (\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k)}) = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ x \in [a,b]\,,\ y = ?\ ),\ldots,\ \}\,,$$

то, **критерий точности** этой модели, обычно, *определяет пространство* $C_{[a,b]}$ и, часто, *определяет пространство* $C^k_{[a,b]}\,.$

10. Эталон для оценки качества аппроксимации

Эталон для оценки точности аппроксимации функции

$$y(x)\ ,\ x \in [a,b]\ , \quad y(x) \in X\ , \quad X = C_{[a,b]}\ ,\ L_2(a,b;\rho)\ ,\ \ldots$$

(элемента линейного нормированого пространства X)
алгебраическим полиномом порядка n

$$y_n = y_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

— *нормы в пространстве* X *погрешности этой аппроксимации*

$$\|y(x) - y_n(x)\|_X \ = \ \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

есть *величина наилучшего (в пространстве* X *) приближения функции* $y(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* n *.*

$$etalon(\|y - y_n\|_X) = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X = E_{n,X}[y]\ .$$

11. Коэффициент оптимальности аппроксимации

В пространстве $X = C_{[a,b]}$, ... норму погрешности аппроксимации

$$\|y(x) - y_n(x)\|_X \;=\; \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

функции $y(x)$, $x \in [a,b]$ ($y(x) \in X$) алгебраическим полиномом

$$y_n = y_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

естественно *сравнить с эталоном для нормы этой погрешности*

$$etalon(\|y - y_n\|_X) = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X = E_{n,X}[y]$$

— величиной наилучшего (в пространстве X) приближения функции $y(x)$ алгебраическими многочленами порядка n — вычислить их отношение

$$\|y - y_n\|_X \;/\; E_{n,X}[y] \;= \|y - y_n\|_X \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X \quad (7)$$

— *коэффициент оптимальности аппроксимации функции* y *полиномом* y_n .

12. Коэффициент оптимальности метода

Если уравнение $F[y]=0$ имеет решение

$$(\ y(x)\ ,\ x\in[a,b]\ )=solve(\ F[y]=0\ ,\ y=?\ )\in X\,,\quad X=C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,,\ldots,$$

и полином y_n — результат преобразования этого уравнения

$$y_n=method(\ F[y]=0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n\,,$$

то *коэффициент оптимальности аппроксимации функции* $y(x)$ *полиномом* y_n *в пространстве* X (7) $\|y-y_n\|_X\ /\ E_{n,X}[y]$ оценивает качество аппроксимации — *коэффициент оптимальности аппроксимации преобразования уравнения* $F[y]=0$ *в его решение* $y=solve(\ F[y]=0\,,\ y=?\ )$ *преобразованием уравнения* $F[y]=0$ *по этому методу*

$$y_n=method(\ F[y]=0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n$$

— *коэффициент (константу) оптимальности в пространстве* X *преобразования по методу* $method$ *уравнения* $F[y]=0$

$$\|y-y_n\|_X\ /\ E_{n,X}[y]=C_n(\ method\ ,\ F[y]=0\ ,\ X\ )\ . \tag{8}$$

13. Свойства коэффициента оптимальности (8)

$$\|y - y_n\|_X \;/\; E_{n,X}[y] \;= \|y - y_n\|_X \;/ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X \,.$$

1. Область значений коэффициента оптимальности (8)

$$\|y - y_n\|_X \;/\; E_{n,X}[y] \;= C_n(\; method \;,\; F[y] = 0 \;,\; X \;) \in [1, \infty) \;.$$

2. Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1 .

3. Коэффициент оптимальности (8) линейного метода

$$V(\; Const \cdot y(x),\; [a,b] \;,\; n \;) \;= Const \cdot V(\; y(x),\; [a,b] \;,\; n \;)$$

преобразования функций в алгебраический полином порядка n (2)

$$V(\; y(x),\; [a,b] \;,\; n \;) \;=\; V_n[y(x)] = \; c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

не зависит от масштаба по y — справедливо тождество ($C = Const$)

$$\|\; C \cdot y(x) - V_n[\; C \cdot y \;]\;\|_X \;/\; E_{n,X}[C \cdot y] = \|\; y(x) - V_n[\; y \;]\;\|_X \;/\; E_{n,X}[y] \;.$$

14. Требование СКА к коэффициенту оптимальности

Из требований 4 и 5 и свойств коэффициента оптимальности следует требование.

Требование 6. *В пространстве* X *коэффициент оптимальности*

$$\|y - y_n\|_X \ / \ E_{n,X}[y] \ = \|y - y_n\|_X \ / \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

аппроксимации преобразования функционального уравнения $F[y] = 0$ *в его решение*

$$(\ y(x)\ ,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием уравнения $F[y] = 0$ *в полином порядка* n *по методу*

$$y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

должен быть " близок " к наименьшему среди коэффициентов оптимальности всех методов аппроксимации преобразования

$$(\ y(x)\ ,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием уравнения $F[y] = 0$ *в алгебраический полином порядка* n *.*

Эти методы реализуемы в СКА.

15. Классическое программное обеспечение

По программам [7] систему из дифференциального уравнения разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) \tag{9}$$

и начальных условий (4) преобразуют в сеточную функцию

$$y_h = D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ [a, b],\ q\ ) = \tag{10}$$

$$\{\ y_i\ \}_{i=0}^{q}\ , \quad \{\ y_i \approx y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ .$$

Сетка узлов $\{x_0, \ldots, x_q\} \subset [a, b]$, равномерная и шаг сетки $h = (b - a)/q$.

Сеточная функция y_h аппроксимирует решение этой системы уравнений — функцию

$$y(x) = solve(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ y = ?\ )\,, \tag{11}$$

$x \in [a, b]$ в узлах сетки.

16. СКА и классическое программное обеспечение

Сеточную функцию $\{ y_i \}_{i=0}^{q}$ СКА не дифференцируют, не интегрируют, ...
Следовательно. Согласно требованиий 1 и 2, справедливо утверждение.

Вывод 3. *Для использования классического программного обеспечения в СКА необходимо создать в этой системе линейный оператор*

$$y_n = P_{n,q}[\ \{y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ] = y(x_0) \cdot l_0^{n,q}(x) + \cdots + y(x_q) \cdot l_q^{n,q}(x)\ , \qquad (12)$$

где $x_0 = a\ ,\ x_1 = x_0 + h\ ,\ x_2 = x_1 + h\ , \ldots ,\ x_q = x_{q-1} + h = b\ ,$

$l_0^{n,q}(x), \ldots , l_q^{n,q}(x)$ — фундаментальные алгебраические полиномы порядка n.

В пространстве X *коэффициент оптимальности*

$$\|y(x) - P_{n,q}[\ \{y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ]\|_X \ /\ E_{n,X}[y] = C_n(\ P_{n,q}\ ,\ \{\ y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ,\ X\ )$$

аппроксимации функции $y(x)$ *полиномом* y_n *(12) "близок" к наименьшему среди коэффициентов оптимальности методов вида (12).*

Эти методы преобразуют дискретизацию $\{\ y(x_i)\ \}_{i=0}^{q}$ функции $y(x) \in X$ в алгебраический полином порядка n, имеют равномерную сетку узлов и их полиномы $l_0^{n,q}(x), \ldots , l_q^{n,q}(x)$ — результаты алгебраических преобразований.

17. Композиция сеточного метода и интерполяции

$$P_{q,q}[\ D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ [a, b],\ q\ )\ ] \ =$$

$$P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ] \ = \ y_0 \cdot l_0^q(x) + \cdots + y_q \cdot l_q^q(x)\ . \qquad (13)$$

Метод (13) имеет оператор алгебраического интерполирования

$$P_q[y, [a, b]] = P_{q,q}[\ \{y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ] = y(x_0) \cdot l_0^q(x) + \cdots + y(x_q) \cdot l_q^q(x)$$

с равноотстоящими узлами

$$x_0 = a\ ,\ x_1 = x_0 + h\ ,\ x_2 = x_1 + h\ , \ldots ,\ x_q = x_{q-1} + h = b\ .$$

Полином $P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]$ интерполирует в этих узлах сеточную функцию (10)

$$y_h = D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ [a, b],\ q\ )$$

— результат преобразования по сеточному методу D_method входа

$$(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ [a, b],\ q\ )\ .$$

18. Эффективность алгебраической интерполяции

$$P_q[y,[a,b]] = P_{q,q}[\ \{y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ] = y(x_0)\cdot l_0^q(x) + \cdots + y(x_q)\cdot l_q^q(x)\ .$$

Алгебраический полином $P_q[y,[a,b]]$ имеет порядок q и интерполирует функцию $y(x)$ в равноотстоящих узлах на отрезке $[a,b]$

$$x_0 = a\ ,\ x_1 = x_0 + h\ ,\ x_2 = x_1 + h\ ,\ldots,\ x_q = x_{q-1} + h = b\ .$$

Оператор интерполирования $P_n[y,[a,b]]$ проектирует пространство $C_{[a,b]}$ в пространство полиномов порядка n — $P_n \subset C_{[a,b]}$ и в пространстве $C_{[a,b]}$ [3]

$$\|P_n\|_{C_{[a,b]}} = \||l_0^q(x)| + \cdots + |l_q^q(x)|\|_{C_{[a,b]}} = \sup_{\|y\|_{C_{[a,b]}}=1} \|P_n[y]\|_{C_{[a,b]}} = O(q^n)\ ,\ \text{где}\ q \geq 2\ .$$

Если функция $y(x)$ не целая, то, часто,

$$\lim_{n\to\infty} \|y(x) - P_n[y(x),\ [a,b]]\|_{C_{[a,b]}} \neq 0$$

— последовательность интерполяционных полиномов с равноотстоящими узлами с ростом числа узлов не сходится [3].

Пример 1. [3] $\lim\limits_{n\to\infty} \|1/(1+25\cdot x^2) - P_n[1/(1+25\cdot x^2),\ [-1,1]]\|_{C_{[-1,1]}} \neq 0\ .$

19. СКА и композиция сеточного метода и интерполяции

Норма в пространстве $C_{[a,b]}$ погрешности аппроксимации функции $y(x) \in X$ (11) полиномом $P_{n,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]$ (12) удовлетворяет неравенство

$$\|y - P_{n,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]\|_{C_{[a,b]}} \le \|y - P_{n,q}[\ \{y(x_i)\}_{i=0}^{q}\ ]\|_{C_{[a,b]}} + \|P_{n,q}\|_{C_{[a,b]}} \cdot \max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_i| \ .$$

Согласно этого неравенства.

Из не эффективности алгебраического интерполирования по равноотстоящим узлам в качестве аппарата аппроксимации функций следует утверждение.

Вывод 4. *Композиция сеточного метода (10) решения задачи Коши (9), (4) (с равноотстоящими узлами) и алгебраической интерполяции по узлам сетки*

$$P_{q,q}[\ D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ [a, b],\ q\ )\ ]$$

(13), как правило, не удовлетворяет требования 4 – 6.

Многочлен $P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]$ (13), часто, не удовлетворяет основной критерий эффективности математических моделей — **точность.**

20. СКА и методы с насыщением

В программах [7] реализованы методы вычисления аппроксимации

$$\{y_i\}_{i=0}^{q} \;=\; D_method(\; y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\; init_cond(y, a)\;,\; [a, b],\; q\;)$$

решения задачи Коши (9), (4)

$$(\; y(x)\;,\; x \in [a, b]\;) = solve(\; y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\; init_cond(y, a)\;,\; y(x) = ?\;)$$

в узлах $\{x_0, \ldots, x_q\} \subset [a, b]$.

Эти методы и другие сеточные методы [6], [7], ... имеют насыщение порядка p, где $p = p(method) \le 6$, т. е.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(q^{-p})\;.$$

Если функция имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка k , то в пространстве $C_{[a,b]}$ для величины наилучшего приближения этой функции алгебраическими полиномами порядка n справедливо тождество [2]

$$E_{n,C_{[a,b]}}[y \in C^k_{[a,b]}] = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}} = O(n^{-k})\;.$$

Из этих тождеств и *вывода 4* следует утверждение.

Вывод 5. *Пусть.*

1. Решение задачи Коши (9), (4)

$$y(x) = solve(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\ ,\ y(x) = ?\ )\ \in C^{p+k}_{[a,b]}$$

— имеет на отрезке $[a, b]$ *непрерывную производную порядка* $p + k$.

2. Метод вычисления аппроксимации (10)

$$\{y_i\}_{i=0}^{q}\ =\ D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\,,\ [a, b],\ q\ )$$

этого решения $y(x)$ *в узлах* $\{x_0, \ldots, x_q\} \subset [a, b]$ *имеет насыщение порядка* p — $\max_{i=0,\ldots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(q^{-p})$.

Тогда коэффициент оптимальности (8) преобразования этой задачи Коши в ее решение $y(x)$ *преобразованием этой задачи Коши по методу (13)*

$$y_q = P_{q,q}[\ D_method(\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\,,\ [a, b],\ q\ )\ ]$$

(по методу алгебраической интерполяции этого сеточного решения) не меньше

$$C_q(\ P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ],\ y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),\ init_cond(y, a)\,,\ C_{[a,b]}\ )\ =$$

$$\|y - y_q\|_X\ /\ E_{q,C_{[a,b]}}[y]\ \geq\ \max_{i=0,\ldots,q} |y(x_i) - y_i| / E_{q,C_{[a,b]}}[y] = O(q^k)\ .$$

21. Пример не эффективности метода с насыщением

Пример 2. Модельная задача Коши методов Рунге - Кутта [6] (с. 106)

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5 \ . \tag{14}$$

имеет единственное решение — функцию $y(x) = 1/(x+2) - 1/x =$

$$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \, , \ y(0.5) = -8/5 \ ) = -2/(x \cdot (x+2)) \, . \tag{15}$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y = 1/(x+2) - 1/x$ (15) на отрезке $[0.5, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_n(y, [0.5, 1])\}_{n=0}^{16} = \{-1, \ 0.45, \ -0.08, \ 0.014, \ -0.002, \ 0.0004,$$
$$-7.2 \cdot 10^{-5}, \ 1.2 \cdot 10^{-5}, \ -2.1 \cdot 10^{-6}, \ 3.6 \cdot 10^{-7}, \ -6.2 \cdot 10^{-8}, \ 10^{-8},$$
$$-1.8 \cdot 10^{-9}, \ 3.1 \cdot 10^{-10}, \ -5.4 \cdot 10^{-11}, \ 9.3 \cdot 10^{-12}, \ -1.6 \cdot 10^{-12}\} \ .$$

Функция $y(x) = 1/(x+2) - 1/x = -2/(x \cdot (x+2))$ (15) — аналитическая в комплексной плоскости, имеет полюсы в точках 0 , -2 и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (с ростом параметра n) регулярно убывают к нулю

$$\{ \ |a_{n+1}(y, [0.5, 1])| / |a_n(y, [0.5, 1])| = \gamma_n \ \}_{n=0}^{15} = \{0.45, \ 0.18, \ 0.18, \ldots, 0.18\} \ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 6. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y = 1/(x+2) - 1/x$ *(15) алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}} \;=\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\;)$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка $n+1$ *функции* $y(x)$ *(15) на отрезке* $[0.5, 1]$.

$$\Theta(\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\;) = |a_{n+1}(y, [0.5, 1])|\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}} = (1 + \beta_n) \cdot |a_{n+1}(y, [0.5, 1])|\;,$$

$$\text{где} \qquad |\beta_n| \le \beta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y, [0.5, 1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$$

Вывод 7. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *коэффициент оптимальности (8)*

$$\|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{q,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (14) в ее решение (15)

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

преобразованием задачи Коши (14) по методу Рунге - Кутта [6]

$\{\ y_i\}_{i=0}^{q} = method_[6](\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\,,\ [0.5,1],\ q\ )$

и интерполированием $y_n(x) \ = \ P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]$ *имеет главную часть* $\Theta(\ C_n\ )$.

Эта главная часть тождественна отношению

$$\|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ |a_{n+1}(y,[0,5,1])| = \Theta(\ C_n\ )\ ,$$

где $a_{n+1}(y,[0.5,1])$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1$ *функции* $y(x)$ *(15) на отрезке* $[0.5,1]$. *Справедливо тождество*

$$\|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ |a_{n+1}(y,[0,5,1])| \ = \ \|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \cdot (1+\beta_n)\,,$$

где $\quad |\beta_n| \le \beta \approx 0.2\,, \quad |a_n(y,[0.5,1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$

Погрешность решения задачи (14) на отрезке $[0.5,\,1]$ по наиболее точному из методов Рунге - Кутта принимает значения [6] (с. 103).

$$\max_{i=0,\ldots,5} |y(0.5+i/10) - y_h(0.5+i/10)| = 3\cdot 10^{-6}\,.$$

$$\max_{i=0,\ldots,10} |y(0.5+i/20) - y_h(0.5+i/20)| = 3\cdot 10^{-8}\,.$$

Следовательно. В соответствии с оценками погрешности метода Рунге - Кутта

$$\max_{i=0,\ldots,q} |y(0.5+i/(2\cdot q)) - y_h(0.5+i/(2\cdot q))| \approx C/(2\cdot q)^5\,, \quad \text{где } C \approx 0.3\,.$$

Из этого тождества и вывода 7 следует заключение.

Вывод 8. *Главная часть*

$$\|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ |a_{n+1}(y, [0,5, 1])|$$

коэффициента оптимальности (8)

$$\|y - P_q[y_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{q,C_{[0.5,1]}}[y(x)]$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (14) в ее решение (15)

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

преобразованием задачи Коши (14) по методу Рунге - Кутта [6]

$\{\ y_i\}_{i=0}^{q} = method_[6](\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\,,\ [0.5, 1],\ q\ )$

и интерполированием $y_n(x) = P_{q,q}[\ \{y_i\}_{i=0}^{q}\ ]$ *не меньше*

$$\max_{i=0,\ldots,q} |y(0.5 + i/(2 \cdot q)) - y_h(0.5 + i/(2 \cdot q))| \ / \ |a_{q+1}(y, [0.5, 1])| \approx$$

$$0.3/(2 \cdot q)^5 \cdot 0.18^{q+1} \approx O(5^q)\,.$$

22. Преобразования метода ряда Тейлора

1. Преобразуют начальные условия (4) в значения коэффициентов ряда Тейлора решения задачи Коши (3), (4) в точке d

$$c_0(d) = Y_0\,,\quad c_1(d) = Y_1\,,\ldots,c_{k-1}(d) = Y_{k-1}/(k-1)!\,.$$

2. Вычисляют ряд Тейлора в точке d с коэффициентами $c_0(d)\,,\ldots,c_{k-1}(d)$ и символьными коэффициентами $c_k,\ c_{k+1},\ \ldots,c_n,\ldots\ \in Atom$ (неизвестными)

$$(\ y(x) \in A_d = ?\ )\ =\ c_0(d) + \cdots + c_{k-1}(d)\cdot(x-d)^{k-1} + c_k\cdot(x-d)^k + \cdots\ . \quad (16)$$

3. Оператором $F[y] = f(x, y, y' \ldots, y^{(k)})$ (3) преобразуют ряд $y(x) \in A_d = ?$ (16) в функцию аргументов $x,\ c_k,\ c_{k+1},\ldots,c_n,\ldots$.

$$F[\ c_0(d) + \cdots + c_{k-1}(d)\cdot(x-d)^{k-1} + c_k\cdot(x-d)^k + \cdots\ ]\ =\ F[y \in A_d = ?]\,. \quad (17)$$

4. Вычисляют уравнение относительно коэффициентов $c_k,\ldots,c_n,\ldots$ ряда (16)

$$F[\ c_0(d) + \cdots + c_{k-1}(d)\cdot(x-d)^{k-1} + c_k\cdot(x-d)^k + \cdots\ ] = 0\,. \quad (18)$$

5. Функционалом $t_i(f(x),d) = f^{(i)}(d)/i!$ преобразуют уравнение (18) в систему уравнений относительно коэффициентов $c_k,\ c_{k+1},\ldots,c_n,\ldots$ ряда (16)

$$t_i(F[\ c_0(d)+\cdots+c_{k-1}(d)\cdot(x-d)^{k-1}+c_k\cdot(x-d)^k+\cdots\ ],\ d) = 0\ ,\quad i = 0,1,\ldots\ . \qquad (19)$$

6. Решают систему уравнений (19)

$$solve(\ \{t_i(F[\ c_0(d)+\cdots+c_{k-1}(d)\cdot(x-d)^{k-1}+c_k\cdot(x-d)^k+\cdots\ ],\ d) = 0\ \}_{i=0}^{\infty}\ )$$

и вычисляют значения

$$\{\ c_k(d),\ c_{k+1}(d),\ldots,c_n(d),\ldots\ \} = solve(\ \{t_i(F[\ y\in A_d\ ],\ d) = 0\ \}_{i=0}^{\infty}\ ) \qquad (20)$$

коэффициентов $c_k,\ c_{k+1},\ldots,c_n,\ldots$ искомого ряда Тейлора (16).

7. Преобразуют значения $c_0(d),\ldots,c_{k-1}(d)$ и $c_k(d),\ldots$ (20) коэффициентов $c_0,\ c_1,\ldots,c_k,\ldots$ в ряд Тейлора в точке d с этими коэффициентами

$$T[y,d]\ =\ c_0(d)+c_1(d)\cdot(x-d)+\cdots+c_n(d)\cdot(x-d)^n+\cdots\ .$$

23. СКА и метод ряда Тейлора.

Из вида преобразований метода ряда Тейлора следуют утверждения.

Вывод 9. *Преобразования 1,2, 4 и 7 — алгебраические.*

Если оператор уравнения (3) имеет алгебраические операции, то преобразование 3 — алгебраическое.

Если функция $F[y \in A_d = ?]$ *(17) имеет алгебраические операции, то преобразование 5 — алгебраическое.*

Если уравнение (3) линейное, то уравнения (19) — линейные алгебраические.

Если система (19) имеет линейные алгебраические уравнения и конечна, то преобразование 6 — алгебраическое.

Коэффициент оптимальности аппроксимации функции (не многочлена) частной суммой порядка n ее ряда Тейлора в пространстве $C_{[a,b]}$

$$\|y - Taylor[y, d, n]\|_{C_{[a,b]}} / E_n[y, C_{[a,b]}] = O(q^n) \ , \quad \text{где} \ \ q \geq 2 \ ,$$

— с ростом n растет более быстро, чем полином. Следовательно. Справедлив.

Вывод 10. *Метод ряда Тейлора не удовлетворяет требование 6.*

24. Пример не эффективности метода ряда Тейлора.

Пример 3. Функция $\ln(x+1)$ — решение задачи Коши

$$(x+1)\cdot y' = 1\,,\ y(0) = 0\,.$$

В пространстве $C_{[0,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции $\ln(x+1)$ частной суммой порядка $n = 5000$ ее ряда Тейлора в точке ноль

$$\|\ln(x+1) - (x - x^2/2 + x^3/3 + \ldots - x^{5000}/5000)\|_{C_{[0,1]}} \approx 10^{-4}$$

больше нормы погрешности аппроксимации функции $\ln(x+1)$ частной суммой порядка $n = 4$ ее ряда Фурье - Чебышева на отрезке $[0,1]$.

$$\|\ln(x+1) - (0.37645 + 0.34314\cdot T_1(z) + \ldots - 0.00043\cdot T_4(z))\|_{C_{[0,1]}} \approx 5\cdot 10^{-5}\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z = 2\cdot x - 1\,.$$

Следовательно. Из вывода 10 и примера 3 следует утверждение.

Вывод 11. *Процедуру реализующую метод ряда Тейлора рекомендуется использовать в СКА в случае.*

Требования к точности решения задачи Коши (3), (4) не высокие.

25. Метод ряда Чебышева

По методу ряда Чебышева [5] (с. 275 — 348) решают уравнения

$$F[y] = 0\ , \quad \text{где} \quad solve(\ F[y] = 0\ ,\ \ y = ?\ ) = (\ y(x)\ ,\ x \in [-1, 1]\ )\ .$$

1. Вычисляют ряд Чебышева на отрезке $[-1, 1]$

$$(\ y(x) \in L_2(a, b; \rho) = ?\ ) = \ c_0 \cdot T_0(x) + \cdots + c_n \cdot T_n(x) + \cdots\ ,$$

где коэффициенты $c_0,\ c_1, \ldots, c_n, \ldots$ символьные и $T_i(x) = \cos(i \cdot \arccos(x))$ — многочлен Чебышева первого рода порядка i.

2. Уравнение $F[y] = 0$, где неизвестна функция $y(x) \in L_2(-1, 1; \rho)$, заменяют уравнением относительно ряда Чебышева этой функции

$$(\ F[y \in L_2(-1, 1; \rho) = ?] = 0\ )\ =\ (\ F[c_0 \cdot T_0(x) + \cdots + c_n \cdot T_n(x) + \cdots] = 0\ )$$

(неизвестны коэффициенты $c_0,\ c_1, \ldots, c_n, \ldots$ этого ряда) и преобразуют это уравнение в систему уравнений относительно коэффициентов $c_0,\ c_1, \ldots, c_n, \ldots$ этого ряда

$$a_i(F[c_0 \cdot T_0(x) + \cdots + c_n \cdot T_n(x) + \cdots],\ [a, b]) = 0\ ,\ \ i = 0, 1, \ldots\ .$$

Линейный функционал $a_i(f(x),[-1,1])$ этой системы вычисляет коэффициент Фурье - Чебышева порядка i функции $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$.

3. Аппроксимируют полученную систему уравнений конечной системой уравнений относительно первых n символьных коэффициентов $c_0,\ c_1,\dots,c_n$ ряда Чебышева на отрезке $[-1,1]$.

Часто, эта система имеет вид

$$a_i(F[c_0\cdot T_0(x)+\dots+c_n\cdot T_n(x)],\ [-1,1])=0\ ,\quad i=0,1,\dots,n\ .$$

4. Решают конечную систему уравнений — вычисляют $c_0(n),\ c_1(n),\dots,c_n(n)$ — аппроксимацию коэффициентов ряда Чебышева решения уравнения $F[y]=0$.

5. Преобразуют коэффициенты $c_0(n),\ c_1(n),\dots,c_n(n)$ в ряд Чебышева на отрезке $[-1,1]$ с этими коэффициентами (частную сумму порядка n ряда)

$$OUTPUT=y_n(x)\ =\ c_0(n)\cdot T_0(x)+\dots+c_n(n)\cdot T_n(x)\ .$$

26. Практическое применение метода ряда Чебышева

Основная область применения метода ряда Чебышева [5] (с. 275 – 348).

Вычисление коэффициентов Фурье - Чебышева решения линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0) =$$

$$(A \cdot y^{(k)} + B \cdot y^{(k-1)} + \cdots + C \cdot y + G = 0). \qquad (21)$$

Для решения этой задачи созданы τ-метод Ланцоша, метод Кленшоу, метод Миллера, метод Олвера и многие другие методы [5]. По этим методам вычислены коэффициенты Фурье - Чебышева элементарных и специальных функций (СМФ)

$$\exp(x),\ \ln(x+1),\ \sin(x),\ \cos(x), \mathrm{sh}(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \ldots,\ \ I_0(x),\ J_0(x),\ Si(x),\ Ci(x), \ldots$$

Эти коэффициенты используют для вычисления значений СМФ в компьютерах.

Недостаток метода ряда Чебышева [5].

Сходимость вариантов этого метода доказана в очень редких случаях.

27. τ-Метод Ланцоша

τ-Метод Ланцоша — классический алгебраический метод ряда Чебышева. Согласно τ-методу [3], ЛДУМК (21) аппроксимируют уравнением

$$A \cdot (\ y_n \in P_n \ )^{(k)} + D[(\ y_n \in P_n \ )] + G + \tau_1 \cdot f_{p+1}(x) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot f_m(x) = 0 \ ,$$

$$\text{где} \quad (\ y_n \in P_n \ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ , \quad c_0, \ldots, c_n \ \in Atom \ ,$$

$f_{p+1}(x), \ldots, f_m(x)$ — функции (многочлены) некоторого базиса. Наиболее часто этот базис — ортогональный базис пространства $L_2(a, b; \rho)$.

Система из подстановки многочлена $(\ y_n \in P_n \ )$ в условия (4)

$$\{ \ (\ y_n \in P_n \ )|_{x=d} = Y_0, \ldots, \ (\ y_n \in P_n \ )^{(k-1)}|_{x=d} = Y_{k-1} \ \} \ \}$$

и аппроксимации по τ-методу ЛДУМК (21), часто, имеет решение:

— значения $c_0(n), \ldots, c_n(n)$ коэффициентов $c_0, \ldots, c_n$ многочлена $y_n \in P_n$ и

— значения $\tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)$ коэффициентов $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$.

Для некоторых ЛДУМК (21) Ланцош построил [3] алгоритмы для вычисления m и p — параметров аппроксимации по τ-методу этих ЛДУМК.

Для каждого ЛДУМК Ланцош построил отдельный алгоритм.

Недостатки τ-метода.

1. Сходимость τ - метода доказана только для задачи Коши $y' = y\,,\ y(0) = 1\,.$
2. Не построены алгоритмы для вычисления параметров m и p аппроксимации по τ-методу ЛДУМК (21) отдельного класса.

Применение τ- метода Ланцоша. Люк предложил применить τ-метод для вычисления коэффициентов Фурье - Чебышева СМФ — решений ЛДУМК. Эти коэффициенты используют для вычисления значений СМФ в компьютерах.

На основании τ - метода Люк и Кленшоу построили алгоритмы для вычисления коэффициентов Фурье - Чебышева СМФ — решений задачи Коши для ЛДУМК.

Эти алгоритмы запрограммированы в компьютерных процедурах. Каждая из этих процедур вычисляет коэффициенты Фурье - Чебышева решения одной задачи.

По этим процедурам вычислены [5] коэффициенты Фурье - Чебышева основной части СМФ (на наиболее часто используемых отрезках).

Развитие τ-метода Ланцоша. Важность точности при вычислении значений СМФ в математических моделях инициировала разработку новых алгебраических приближенных методов для решения ЛДУМК. Построены методы: Кленшоу [5], Миллера [5], Дзядыка (a - метод) [2], модифицированный a - метод [2] и другие.

28. a - Метод Дзядыка.

a -Метод Дзядыка [2] — решения задачи Коши для ЛДУМК (21), (4)

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,$$

$$init_cond(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_0\,,\; y'(d) = Y_1\,, \ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\;\}$$

является композицией двух методов.

1. Преобразование по формулам Дзядыка [2] задачи Коши для ЛДУМК (21), (4) в ЛИУМК Вольтерра — линейное интегральное уравнение вида

$$(\; A \cdot y + L[y] + g = 0\;) \;=\; (\; A(x) + \int_0^x K(x,t) \cdot y(t)\,dt + g(x) = 0\;)\,, \qquad (22)$$

где коэффициент A, ядро K и свободный член g — многочлены.

2. Вычисление и решение аппроксимации ЛИУМК Вольтерра (22)

$$y_n = a\!-\!method(\; A(x) \cdot y(x) + \int_0^x K(x,t) \cdot y(t)\,dt + g(x) = 0\,,\; [a,b]\,,\; n\;) =$$

$$y_n = solve(\, A(x)\cdot y_n(x) + \int_0^x K(x,t)\cdot y_n(t)\,dt + g(x) +$$

$$\tau_1\cdot T_{n+1}(z) + \cdots + \tau_{m-n}\cdot T_m(z) = 0\,,\quad y_n \in P_n = ?\,,\ \tau_1,\ldots,\tau_{m-n} = ?\,)\,,$$

$$\text{где}\quad m = \deg(\, A(x)\cdot y_n(x) + \textstyle\int_0^x K(x,t)\cdot y_n(t)\,dt + g(x)\,,\quad y_n \in P_n)\ ,$$

$$T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,,\quad [a,b] = [-h,h]\vee[0,h]\,,$$

Решением этого уравнения являются:

— значения $c_0(n),\ldots,c_n(n)$ коэффициентов $c_0,\ldots,c_n$ многочлена $y_n \in P_n$ и

— значения $\tau_1(n),\ldots,\tau_{m-n}(n)$ коэффициентов $\tau_1,\ldots,\tau_{m-n}$.

Применение a - метода Дзядыка в вычислительной практике.

Формулы В. К. Дзядыка преобразования задачи Коши для ЛДУМК (21) в ЛИУМК (22) в общем случае не реализованы на компьютерах.

На основании a -метода школа Дзядыка построила алгоритмы и компьютерные процедуры для вычисления коэффициентов Фурье - Чебышева элементарных функций $\exp(x)$, $\cos(x)$, ... и вычислила [2] их. Поэтому справедливо заключение.

Вывод 12. *a - Метод более алгоритмизирован, чем τ - метод Ланцоша. Програмно реализовать a - метод более сложно, чем τ - метод Ланцоша.*

29. Пример эффективности a-метода Дзядыка

Пример 4. По a-методу вход — задача Коши

$$y' = y\,,\quad y(0) = 1\,,\quad solve(\,y' = y\,,\quad y(0) = 1\,,\quad y = ?\,) = \exp(x)\,,$$

отрезок $[-1,1]$ и $n \in N$ преобразуют в полином

$$y_n = a\!-\!method(\,y' = y\,,\, y(0) = 1\,,\, [-1,1],\, n\,)\ .$$

В пространстве $C_{[-1,1]}$ коэффициент оптимальности (8)

$$\|\exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1])}} \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[-1,1]}}$$

аппроксимации функции $\exp(x)$ этим полиномом имеет главную часть

$$\|\exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1])}} \;/\; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1])\ .$$

Эта главная часть принимает значения $1 + O(1/n)$

$$\{\ \|\exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1])}} \;/\; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1])\ ,\quad n = 1, \ldots, 11\ \} =$$

$$\{\,1.3,\ 1.6,\ 1.2,\ 1.6,\ 1.04,\ 1.5,\ 1.05,\ 1.3,\ 1.02,\ 1.04,\ 1.001\,\}\,.$$

30. Источник эффективности a-метода Дзядыка

Решение ЛИУМК Вольтерра (22) по a - методу

$$y_n = a-method(\ A\cdot y + L[y] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$solve(\ A\cdot y_n + L[y_n] + g + \tau_1\cdot T_{n+1}(z) + \cdots + \tau_{m-n}\cdot T_m(z) = 0\ )\,,$$

где $\tau_1,\ldots,\tau_{m-n}\in Atom\ =?\,,\quad m=\deg(A\cdot y_n + L[y_n] + g)\ ,\ (y_n\in P_n)\ ,$

$$T_i(z)=\cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z=2\cdot(x-a)/(b-a)-1\,,\quad [a,b]=[-h,h]\vee[0,h]$$

тождественно решению ЛИУМК Вольтерра (22) по проекционному методу

$$y_n = G(\ A\cdot y + L[y] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$solve(\ S_n[A\cdot y_n + L[y_n] + g] = 0\,,\ y_n\in L_2^n(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

где оператор $S_n\ :\ L_2(a,b;\rho)\ \to\ L_2^n(a,b;\rho)$ — преобразует функцию в частную сумму ряда Фурье - Чебышева этой функции на отрезке $[a,b]$.

$$S_n[f] = a_0(f,[a,b])\cdot T_0(z) + \cdots + a_n(f,[a,b])\cdot T_n(z)\,.$$

Аппроксимационная теорема Дзядыка [2].

Пусть полином A *ЛДУМК (21)*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0$$

не имеет нулей на отрезке $[a,b] = [-h,h]$. — $A(x) \neq 0$, $x \in [-h,h]$.

Тогда в пространстве $C_{[a,b]}$ *ограничен коэфициент оптимальности*

$$\|y - y_n\|_{C_{[a,b]}} \; / \; \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши для этого ЛДУМК (4), (21) в ее решение

$$y(x) = solve(\; A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\; init_cond(y,0)\,,\; y = ?\;)$$

преобразованием этой задачи Коши (4), (21) по a *- методу в полином*

$$y_n = a{-}method(\; A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\; init_cond(y,0)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \; =$$

$$(\;(\; A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\; init_cond(y,0)\;) \;\rightarrow\; A \cdot y + L[y] + g = 0\,,$$

$$y_n = a{-}method(\; A \cdot y + L[y] + g = 0\,,\; [a,b]\,,\; n\;)\;).$$

31. Программирование a - метода Дзядыка

Школа Дзядыка построила по a -методу компьютерные процедуры [2]. По этим процедурам вычислили [2] коэффициенты Фурье - Чебышева СМФ

$$\exp(x),\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \ln(x+1)\dots\ .$$

Такая процедура имеет следующие *вход* и *выход.*

$$INPUT = \ n \in N\ , \qquad OUTPUT = \{\ c_0(n),\ c_1(n), \dots,\ c_n(n)\ \}\ , \quad \text{где}$$

$$c_0(n) + c_1(n)\cdot x + \dots + c_n(n)\cdot x^n\ = a-method(\ F[y]=0\ ,\ [-h,h]\ ,\ n)\ ,$$

$F[y]=0$ — ЛИУМК Вольтерра (22), определяющее СМФ.

Для каждой СМФ создана своя процедура. Такая процедура решает эквивалент аппроксимации ЛИУМК Вольтерра (22) по a - методу. Этот эквивалент вычислен до программирования.

Оценка эффективности процедур [2] по требованиям СКА.
Каждая из этих процедур решает только одно ЛИУМК Вольтерра.
Эти процедуры не удовлетворяют требование 3.

32. Проекционный метод решения уравнения $F[y] = 0$

$$y_n = V(\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) = solve(\ V_n[F[\ y_n\ ]] = 0\,,\ y_n \in X_n = ?\ ) \qquad (23)$$

Оператор V_n (23) преобразует функцию $f \in X$ в полином порядка n

$$V_n[f] = v_0(f) \cdot l_0(x) + \cdots + v_n(f) \cdot l_n(x) \qquad (24)$$

и проектирует пространство $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho), \ldots$ в пространство $X_n \subset X$

$$V_n[\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ] = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ .$$

Функционалы $v_i(y)\ ,\ i = 0, 1, \ldots$ оператора V_n — линейные .

Элементы пространства X_n — алгебраические полиномы порядка n .

Метрика пространства X_n тождественна метрике пространства X .

Полином $(\ y_n \in X_n = ?\ ) \ = \ c_0 \cdot l_0(x) + \cdots + c_n \cdot l_n(x)$

метода (23) имеет символьные коэффициенты — $c_0, \ldots\ c_n \in Atom$.

Этот полином часто заменяют алгебраическим полиномом порядка n общего вида — элементом общего вида пространства P_n

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\ \text{где}\ \ c_0,\ c_1, \ldots, c_n\ \in Atom\ .$$

33. Преобразования метода (23)

$$y_n = V(\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) = solve(\ V_n[F[\ y_n\ ]] = 0\,,\ y_n \in X_n = ?\ )\,.$$

Метод 2. Композиция метода (23) и метода неопределенных коэффициентов.

1. Вычислить многочлен общего вида пространства P_n .

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\ \text{где}\ \ c_0,\ c_1, \ldots, c_n\ \in Atom\ .$$

Этот многочлен имеет символьные (неизвестные) коэффициенты.

2. Вычислить функцию аргументов $x,\ c_0, \ldots, c_n$

$$F(x, c_0, \ldots, c_n) = F[\ y_n \in P_n = ?\ ]\,. \tag{25}$$

Оператором $F[y]$ преобразовать многочлен $y_n \in P_n = ?$.

3. Вычислить систему уравнений

$$S[c_0, \ldots, c_n] = \{v_i(F[\ y_n \in P_n = ?\ ],\ [a,b]) = 0\ \}_{i=0}^{n}\ , \tag{26}$$

$$\text{где}\quad v_i(F[y_n \in P_n],\ [a,b]) = \ v_i(F(x, c_0, \ldots, c_n),\ [a,b])$$

— результат преобразования функционалом v_i (24) функции $F[y_n \in P_n]$.

Неизвестные системы (26) — коэффициенты $c_0,\ c_1, \ldots, c_n$ искомого полинома.

4. Вычислить решение системы уравнений (26)

$$\{c_0(n), \ldots, c_n(n)\} = solve(\ S[c_0, \ldots, c_n],\ c_0, \ldots, c_n = ?\ ) \tag{27}$$

— коэффициенты (значения коэффициентов) искомого многочлена y_n .

5. Преобразовать коэффициенты (27) искомого многочлена в этот многочлен.

$$OUTPUT = y_n = c_0(n) + c_1(n) \cdot x + \cdots + c_n(n) \cdot x^n\ . \tag{28}$$

Для преобразований метода 2 справедливо утверждение.

Вывод 13. *Преобразования 1 и 5 — алгебраические.*

Если оператор $F[y]$ имеет алгебраические операции, то преобразование 2 — алгебраическое.

Если функция $F(x, c_0, \ldots, c_n)$ (25) имеет алгебраические операции и функционалы оператора V_n (24) имеют алгебраические преобразования, то преобразование 3 — алгебраическое.

Если уравнение $F[y] = 0$ линейное, то уравнения системы (26) — линейные алгебраические и преобразование 4 — алгебраическое.

34. Условия эффективности проекционного метода (23)

Согласно теоремам о сходимости проекционного метода (23) ([4], глава 3).
В пространстве $X = L_2(a,b;\rho),\ C_{[a,b]},\ \ldots$.

1. Уравнение (23) $V_n[F[\ y_n\ ]] = 0\,,\ y_n \in X_n = ?$ имеет решение в случае

$$\textit{Уравнение}\quad F[\ y\ ] = 0\quad \textit{принадлежит к классу}\quad M(X,V)\ .$$

2. Условия принадлежности уравнения $F[\ y\ ] = 0$ к классу $M(X,V)$
определяют аппроксимационные характеристики оператора V_n *(24)*

$$\|V_n\|_X\,,\ \|f(x) - V_n[f(x)]\|_X\,,\ \|f(x) - V_n[f(x)]\|_X / E_{n,X}[f(x)]\,,$$

где $f(x) = y(x) = solve(\ F[y] = 0\ ,\ y = ?\ )$ и $f(x) = F[y(x) \in X]$.

3. Если уравнение $F[\ y\ ] = 0$ принадлежит к классу $M(X,V)$, то

$$\|y(x) - V[F[y] = 0,\ [a,b],\ n]\|_X\ =\ H(\|y(x) - V_n[y(x)]\|_X)\ .$$

4. Если уравнение $(\ F[y] = 0\ ) = (\ y = L[y] + g\ ) \in M(X,V)$, то

$$\|y(x) - V[y = L[y] + g,\ [a,b],\ n]\|_X\ =\ (1 + o(1)) \cdot \|y(x) - V_n[y(x)]\|_X\ .$$

35. Наилучший оператор проектирования в полином

$$V_n \ : \ L_2(a,b;\rho) \to L_2^n(a,b;\rho) \ , \quad V_n[y] = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ среди операторов преобразующих функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в алгебраический полином порядка n наилучшие аппроксимационные характеристики имеет оператор преобразующий функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева этой функции на отрезке $[a,b]$.

$$S_n[f] = a_0[f] \cdot T_0(z) + \cdots + a_n[f] \cdot T_n(z) \ , \quad f \in L_2(a,b;\rho) \ , \tag{29}$$

где

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z)) \ , \quad z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1 \tag{30}$$

— многочлен Чебышева первого рода порядка i перенесенный на отрезок $[a,b]$.

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ частная сумма порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a,b]$ есть полином наилучшего приближения этой функции [5] (с. 54).

$$\|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)} = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{L_2(a,b;\rho)} = E_{n,L_2(a,b;\rho)}[y] \ .$$

Следовательно. Справедливо заключение.

Вывод 14. *Справедливо тождество.*

$$\|y-S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)}/E_{n,L_2(a,b;\rho)}[y]=1=\inf_{V_n\ :\ L_2(a,b;\rho)\to P_n}\|y-V_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)}/E_{n,L_2(a,b;\rho)}[y]\ .$$

Оператор S_n *(29) является наилучшим среди операторов*

$$V_n\ :\ L_2(a,b;\rho)\to L_2^n(a,b;\rho)\ ,\quad V_n[y]=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n$$

(операторы проектируют пространство $L_2(a,b;\rho)$ *в пространство* $L_2^n(a,b;\rho)$ *алгебраических полиномов порядка* n *с метрикой пространства* $L_2(a,b;\rho)$ *) согласно критерию* точность аппроксимации в пространстве $L_2(a,b;\rho)$.

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ минимум коэффициента оптимальности

$$\|y-V_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)}\ /\ E_{n,L_2(a,b;\rho)}[y]$$

аппроксимации функции $y(x)\in L_2(a,b;\rho)$ алгебраическим полиномом

$$V_n[y(x)]=c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n$$

достигается на полиноме $S_n[y]$ (29).

36. Норма и коэффициент оптимальности оператора

Для оператора проектирования (24) пространства $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ldots$ в пространство $X_n \subset X$ алгебраических полиномов порядка n

$$V_n[y] = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ = \ V_n[\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ]$$

справедливо неравенство [5] (с. 71)

$$\|y - V_n[y]\|_X \le (\|V_n\|_X + 1) \cdot E_{n,X}[y]\ , \tag{31}$$

где

$$E_{n,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

— величина наилучшего (в пространстве X) приближения функции $y(x)$ алгебраическими полиномами порядка n ,

$$\|V_n\|_X = \sup_{y \in X} \|V_n[y]\|_X / \|y\|_X$$

— норма оператора V_n в пространстве X .

В пространстве $C_{[a,b]}$ неравенство (31) не улучшаемо [5] (с. 71).

Из неравенства (31) следует утверждение.

Вывод 15. *Справедливо неравенство.*

$$\|V_n\|_X + 1 \;\geq\; \|y - V_n[y]\|_X / E_{n,X}[y]\,.$$

$\|V_n\|_X + 1$ *есть оценка сверху коэффициента оптимальности*

$$\|y - V_n[y]\|_X / E_{n,X}[y]$$

аппроксимации функции $y(x) \in X$ *полиномом* $V_n[y]$ *(24).*

В пространстве $C_{[a,b]}$ *эта оценка точная.*

37. Норма оператора S_n (29) в пространстве $L_2(a,b;\rho)$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ норма оператора S_n (29) наименьшая среди норм операторов проектирования этого пространства в пространство алгебраических полиномов порядка n .

$$\|S_n\|_{L_2(a,b;\rho)} = \sup_{y \in L_2(a,b;\rho)} \|S_n[y]\|_{L_2(a,b;\rho)} / \|y\|_{L_2(a,b;\rho)} = 1 = \inf_{V_n^2 = V_n \,:\, L_2(a,b;\rho) \to P_n} \|V_n\|_{L_2(a,b;\rho)}\,.$$

38. Норма оператора S_n (29) в пространстве $C_{[a,b]}$

Для оператора проектирования пространства $C_{[a,b]}$ в пространство P_n алгебраических полиномов порядка n справедливо неравенство [5] (с. 84)

$$\|V_n\|_{C_{[a,b]}} \geq (2/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \ . \tag{32}$$

Для оператора S_n (29) справедливо тождество [5] (с. 77)

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} = (4/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1) \ . \tag{33}$$

Из неравенства (32) и тождества (33) следует заключение.

Вывод 16. *Справедливо неравенство.*

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} \ / \inf_{V_n^2=V_n \ : \ C_{[a,b]} \to P_n} \|V_n[y]\|_{C_{[a,b]}} \leq \ 2 + o(1) \ .$$

— *В пространстве* $C_{[a,b]}$ *норма оператора* S_n *(29) " близка " к наименьшей среди норм операторов проектирования этого пространства в пространство алгебраических полиномов порядка* n *(24)*

$V_n \ : \ C_{[a,b]} \to P_n \ , \ V_n[y] = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ = \ V_n[\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \ ] \ .$

39. Реализация в СКА метода (23), (29)

$$y_n = S(\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) = solve(\ S_n[F[\ y_n\ ]] = 0\,,\ y_n \in L_2^n(a,b;\rho) = ?\ ) \quad (34)$$

Оператор $S_n[y]$ (29) имеет функционалы $a_i(y,[a,b])\ ,\ \ i = 0,\ldots,n$. Они вычисляют коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y(x)\,,\ x \in [a,b]$ [5] (с. 103)

$$a_i(y,[-1,1]) = (2/\pi)\cdot\int_0^{\pi} y(\cos(t))\cdot\cos(i\cdot t)\,dt\,.$$

Это преобразование, в общем случае $y(x) \in L_2(a,b;\rho)\,,$ не алгебраическое.

СКА вычисляют коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y(x)\,,\ x \in [a,b]$ приближенно и только в случае, если они вычисляют значения этой функции (числа). СКА не вычисляют коэффициенты Фурье - Чебышева функции (25).

Следовательно. Справедливо следующее утверждение.

Вывод 17. *Метод (34) имеет не алгебраическое преобразование.*

Метод (34) не удовлетворяет требование 2.

Для реализации в СКА метода (34), необходимо построить алгебраический эквивалент этого метода.

40. Алгебраический эквивалент метода (34)

$$y_n = S(\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) = solve(\ S_n[F[\ y_n\ ]] = 0\,,\ y_n \in L_2^n(a,b;\rho) = ?\ )$$

В. К. Дзядык построил [2] a - метод [2] решения ЛИУМК Вольтерра (22)

$$y_n = solve(\ A(x)\cdot y_n(x) + \int_0^x K(x,t)\cdot y_n(t)\,dt + g(x) +$$

$$\tau_1\cdot T_{n+1}(z) + \cdots + \tau_{m-n}\cdot T_m(z) = 0\,,\ \ y_n \in P_n = ?\,,\ \tau_1,\ldots,\tau_{m-n} = ?\,)\,, \qquad (35)$$

где $\ m = \deg(\ A(x)\cdot y_n(x) + \int_0^x K(x,t)\cdot y_n(t)\,dt + g(x)\,,\ \ y_n \in P_n)\ ,$

$$T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\ \ z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,,\ \ [a,b] = [-h,h]\vee[0,h]\,,$$

как эквивалент варианта A - метода [2] с оператором (29).

Этот вариант A - метода эквивалентен проекционному методу (34) [2].

Все операции вычисления и решения по a - методу аппроксимации (35) ЛИУМК Вольтерра (22) — алгебраические.

Следовательно. Из этих эквивалентностей следует заключение.

Вывод 18. *a - Метод (35) решения ЛИУМК Вольтерра (22) есть алгебраический эквивалент проекционного метода (34).*

Заключение

1. Предпочтительный вид процедуры СКА для решения задачи Коши (3), (4)

$$procedure_D_i(\ f(x,y,y'\ldots,y^{(k)})=0\,,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =$$

$$y_n\ =\ c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n$$

— эквивалент проекционному методу (34) решения интегрального уравнения

$$S_p[F[u_p]]=0\,,\quad u_p\in L_2^p(a,b;\rho)\,,\quad S_p\ :\ L_2(a,b;\rho)\to L_2^p(a,b;\rho)\,,\quad p=n-k\,.$$

Уравнение $F[u]=0$ — преобразование задачи Коши (3), (4)

$$(\ F[u]=0\ )=G_i(\ f(x,y,y'\ldots,y^{(k)})=0\,,\ init_cond(y,d)\ )$$

и является корректной задачей. Преобразование G_i имеет обратное.

2. Предпочтительный вид преобразований процедуры $procedure_D_i$ — алгебраические преобразования типа преобразований τ - метода Ланцоша.

3. Метод ряда Тейлора целесообразно использовать в СКА в случае — требования к точности решения задачи Коши (3), (4) не высокие.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

3. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* — М.: Мир. — 1969. — 368 с.

7. *Программное обеспечение ЭВМ Мир-1 и Мир-2, т. 1 — 3.* — Киев: Наукова думка. — 1976.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 2

Создание комплекса APLAN - программ

1. Задача

Построить *комплекс процедур системы APS* [1]

$$procedure_D_1, \ldots, procedure_D_s\,.$$

Процедура $procedure_D_i$ этого комплекса

$$y_n = procedure_D_i(\ f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ = \quad (1)$$

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n \quad (2)$$

— преобразует задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \quad (3)$$

типа D_i — систему из этого уравнения и начальных условий

$$init_cond(y, d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,, \ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \} \quad (4)$$

в алгебраический многочлен порядка n.

2. Метод 1 — выполняет преобразование (1), (2)

$$y_n \;=\; method_D_i(\; f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})=0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \;=$$
$$solve(\; A\cdot y_n^{(k)} + D[y_n] + G + \tau_1\cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p}\cdot T_m(z) = 0\,,$$
$$init_cond(y_n,d)\,,\quad y_n\in P_n=?\,,\; \tau_1,\ldots,\tau_{m-p}=?\,)\,, \qquad (5)$$
$$\text{где}\quad T_i(z)=\cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z=2\cdot(x-a)/(b-a)-1\,,$$
$$m=\deg(f_n(x,(y_n\in P_n=?),(y_n\in P_n=?)',\ldots,(y_n\in P_n=?)^{(k)})\,,\quad p=n-k\,,$$
$$(y_n\in P_n=?)=c_0+\cdots+c_n\cdot x^n\,,\quad \{c_0,\ldots,c_n\}\in Atom\,,\quad \{c_0,\ldots,c_n\}=?\,,$$

Метод 1 — распространение на уравнения типа D_i алгоритмизации τ - метода Ланцоша [2]. Эта алгоритмизация основана на a - методе [3].

По методу 1 преобразуют (5) задачу Коши для ЛДУМК: — условия (4) и — линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \qquad (6)$$

(ЛДУМК) или систему ЛДУМК — результат преобразоваения уравнения (3).

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = method_D_i(\; f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})\;)\,.$$

3. Интегральный эквивалент для задачи Коши (3), (4)

Начальные условия (4) определяют подстановку $y = V^k[u] + P_{k-1}$, где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,. \quad (7)$$

Эта подстановка преобразует:

1) дифференциальное уравнение порядка k (3) в интегральное уравнение

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), (V^k[u] + P_{k-1})', \ldots, (V^{k-1}[u] + P_{k-1})^{(k-1)}, u) = 0\,, \quad (8)$$

2) ЛДУМК порядка k (6) в ЛИУМК

(линейное интегральное уравнение с многочленными коэффициентами)

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + D[P_{k-1}] + G = 0\,. \quad (9)$$

Интегральное уравнение (8) (ЛИУМК (9)) имеет решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $y(x)$ задача Коши (3), (4) (задача Коши для ЛДУМК (6), (4)) и для этих решений справедливы тождества

$$y(x) = V^k[u(x)] + P_{k-1}\,, \quad u(x) = y^{(k)}(x)\,. \quad (10)$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$u_p = solve(\, S_p[A \cdot u_p + D[V^k[u_p]] + D[P_{k-1}] + G] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,. \quad (11)$$

Оператор S_p преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,,$$

где $p = n - k\,,\quad T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\quad z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$

Неизвестные уравнения (11) — (символьные) коэффициенты полинома

$$(\, u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,) = a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\,,\ \{a_0,\ldots,a_p\} \in Atom\,.$$

В методе (11) преобразуют (систему) ЛИУМК (9). Это ЛИУМК вычисляют преобразованием интегрального уравнения (8) по эквиваленту преобразования дифференциального уравнения (3) в (систему) ЛДУМК (6).

Уравнение (11) имеет решение u_p тогда и только тогда, когда имеет решение y_n система уравнений (5) и для этих решений справедливы тождества

$$y_n = V^k[u_p] + P_{k-1}\,,\quad u_p = y_n^{(k)}\,. \quad (12)$$

5. Типы уравнений решаемые процедурами

D_1. *ЛДУМК* — линейные дифференциальные уравнения с многочленными коэффициентами (6)

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0) =$$

$$(A(x) \cdot y^{(k)}(x) + B(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x) \cdot y(x) + G(x) = 0) . \qquad (13)$$

D_2, D_3, D_4. *ЛДУМК дополненные линейным слагаемым*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + H = 0 , \qquad (14)$$

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + H \cdot y = 0 , \qquad (15)$$

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + H \cdot y^{(i)} = 0 , \qquad (16)$$

где H — решение задачи Коши для ЛДУМК.

D_5, D_6. *ЛДУМК дополненные нелинейностью* $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *(алгебраическим полиномом* — D_5 *и фукцией* — D_6 *)*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 . \qquad (17)$$

6. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) является классическим аппаратом для создания математических моделей [2].

СКА вычисляют решение задачи Коши (3), (4) в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша [2] преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином.

Норму погрешности проекционного метода (11) в пространстве $C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots$ определяют аппроксимационные характеристики оператора S_p.

$$A = 1 \ \rightarrow\ \|u - u_p\|_X = (1 + o(1)) \cdot \|u - S_p[u]\|_X\,, \quad X = C_{[a,b]} \ \vee\ L_2(a,b;\rho)\,.$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

7. Метод создания процедур комплекса

1. Построить метод 1 решения задачи Коши для дифференциальных уравнений типа D_i (5)

$$y_n \; = \; method_D_i(\; f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\; init_cond(y, d)\,,\; [a, b]\,,\; n\;)\,.$$

2. Построить алгоритм 1 этого метода для СКА.

$$y_n = algorithm_D_i(\; f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\; init_cond(y, d)\,,\; [a, b]\,,\; n\;)\,. \quad (18)$$

3. Записать этот алгоритм операторами системы APS — построить процедуру 1

$$y_n = procedure_D_i(\; f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\; init_cond(y, d)\,,\; [a, b]\,,\; n\;)\,.$$

4. Доказать эффективность процедуры 1 на модельной задаче и в общем случае и ее эквивалентность алгоритму 1 — тождество полиномов y_n (1) и (18).
5. Доказать эффективность алгоритма 1 и его эквивалентность методу 1. — тождество полиномов y_n (5) и (18).
6. Доказать эффективность метода 1 и его эквивалентность проекционному методу 1 — тождество $y_n = V^k[u_p] + P_{k-1}$ (12) для полиномов y_n (5) и u_p (11).

8. Метод 1 для решения задачи Коши для ЛДУМК (6)

$$y_n \;=\; method_D_1(\; A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \;=$$

$$\begin{gathered} solve(\; A\cdot y_n^{(k)} + D[y_n] + G + \tau_1\cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p}\cdot T_m(z) = 0\,, \\ init_cond(y_n,d)\,,\quad y_n\in P_n = ?\,,\; \tau_1,\ldots,\tau_{m-p} = ?\,)\,, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,,$$

$$m = \deg(\; A\cdot(\; y_n\in P_n = ?\;)^{(k)} + D[(\; y_n\in P_n = ?\;)] + G\;)\,,\qquad p = n-k\,,$$

$$(\; y_n\in P_n = ?\;) = c_0 + c_1\cdot x + \cdots + c_n\cdot x^n\,,\quad c_0,\ldots,c_n\in Atom\;(=?)\,.$$

Метод $method_D_1$ (19) — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2].
Эта алгоритмизация основана на a - методе Дзядыка [3].

9. Метод 1 для решения систем задач Коши типа D_2

$$y = solve(\ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,.$$

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) \quad (20)$$

$$= (\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ )\,.$$

Метод $method_D_1$ (19) — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2].

Эта алгоритмизация основана на a - методе Дзядыка [3].

По методу $method_D_1$ (19) ЛДУМК (6) и условия (4) преобразуют в полином порядка n.

10. Метод 1 для решения систем задач Коши типа D_3

$$y \;=\; solve(\;(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; y = ?\;)\,,$$

$$H \;=\; solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\;)\,.$$

$$y_n \;=\; method_D_3(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,$$
$$H = solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\;)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \quad (21)$$

$$=\; (\;H_n = method_D_1(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)\,,$$
$$y_n = method_D_1(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\; init_cond_1(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)\;)\,.$$

Метод $method_D_1$ (19) — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2].

Эта алгоритмизация основана на a - методе Дзядыка [3].

По методу $method_D_1$ (19) ЛДУМК (6) и условия (4) преобразуют в полином порядка n.

11. Метод 1 для решения систем задач Коши типа D_4

$$y \;=\; solve(\;(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; y = ?\;)\,,$$

$$H \;=\; solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\;)\,.$$

$$y_n \;=\; method_D_4(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,$$
$$H = solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\;)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \quad (22)$$

$$=\; (\;H_n = method_D_1(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)\,,$$
$$y_n = method_D_1(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,,\; init_cond_1(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)\;)\,.$$

Метод $method_D_1$ (19) — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2].

Эта алгоритмизация основана на a - методе Дзядыка [3].

По методу $method_D_1$ (19) ЛДУМК (6) и условия (4) преобразуют в полином порядка n.

12. Метод 1 для решения задачи Коши типа D_5

$$y_n = method_D_5(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G+f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0 \quad (\ f\ \text{— полином}\ ),$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,, \tag{23}$$

где начальное приближение метода простой итерации [4]

$$y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \dots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)! \tag{24}$$

и для вычисления приближений $s = 1, 2, \dots$ метода простой итерации [4] ЛДУМК

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,$$

где

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,, \tag{25}$$

и условия (4) по методу (19) преобразуют в полином порядка n

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ).$$

13. Метод 1 для решения задачи Коши типа D_6

$$y_n = method_D_6(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,$$
$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,, \qquad (26)$$

где начальное приближение (24) метода простой итерации [4]

$$y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \dots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)!\,,$$

и для вычисления приближений $s = 1,2,\dots$ метода простой итерации [4] ЛДУМК

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,$$

где $$F_s = U_n[f_s] = f_s(x_0)\cdot L_0(x) + \dots + f_s(x_n)\cdot L_n(x) \qquad (27)$$

— алгебраический полином [5] (с. 271) интерполирующий функцию (25)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

в узлах Чебышева $$x_i = a + (b-a)\cdot(1-\cos(i\cdot\pi/n))/2\,, \quad i = 0,\dots,n\,, \qquad (28)$$

и условия (4) по методу (19) преобразуют в полином порядка n

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

14. Метод разработки алгоритмов 1

Преобразования методов

$$method_D_1,\ method_D_2,\ method_D_3,\ method_D_4,$$
$$method_D_5,\ method_D_6$$

представлены в виде композиции операций выполняемых СКА.

Алгоритм $algorithm_D_1$ решает задачу Коши для ЛДУМК (6), (4) и имеет преобразования:

— ЛДУМК (6) и условий (4) в их аппроксимацию (5) по методу $method_D_1$,

— этой аппроксимации в систему линейных алгебраических уравнений,

— решение системы линейных алгебраических уравнений,

— коэффициентов полинома y_n в этот полином.

Алгоритмы $algorithm_D_2,\ algorithm_D_3,\ algorithm_D_4,$
$algorithm_D_5,\ algorithm_D_6$

являются композицией алгоритма $algorithm_D_1$ и алгоритма для преобразования уравнения (3) в ЛДУМК (6) или систему ЛДУМК.

15. Метод разработки APLAN - процедур

Операторы системы алгебраического программирования APS [1] выполняют преобразования алгоритмов

$$algorithm_D_1,\ \ algorithm_D_2,\ algorithm_D_3,\ algorithm_D_4\ ,$$

$$algorithm_D_5,\ \ algorithm_D_6\,. \tag{29}$$

Запись алгоритма (29) на языке APLAN (спецификация APLAN - операторов выполняющих преобразования этого алгоритма) есть APLAN - процедура

$$procedure_D_1,\ \ procedure_D_2,\ procedure_D_3,\ procedure_D_4\ ,$$

$$procedure_D_5,\ \ procedure_D_6. \tag{30}$$

Структура данных на входе операторов процедуры определяет структуру данных на входе процедуры.

16. Оценка эффективности APLAN - процедур

Получена полиномиальная по n оценка сложности APLAN - процедур (30)

$$procedure_D_1,\ \ procedure_D_2, \ldots,\ procedure_D_6\,.$$

Доказано. *Если операнды входа процедуры (30)* $procedure_D_i\,,\ i = 1, \ldots, 5$ *(30) имеют целые или рациональные константы, то справедливо тождество*

$$\begin{aligned} &procedure_D_i(\ f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ ) \ = \\ &algorithm_D_i(\ f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ ) \quad . \end{aligned}$$

Коэффициент оптимальности

$$\|(y - y_n)^{(k)}\|_{C_{[a,b]}}\ /\ E_{n-k, C_{[a,b]}}[y^{(k)}]$$

в пространстве $C_{[a,b]}$ аппроксимации преобразования модельной задачи Коши (3), (4) для дифференциального уравнения типа $D_i\,,\ i = 1, \ldots, 6$ в ее решение $y(x)$ преобразованием по методу $method_D_i$ входа (1) с этой задачей Коши (3), (4) в полином y_n ограничен числом 3.

Для задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4), разрешенных относительно старшей производной, этот коэффициент близок к 1.

17. Оценка эффективности алгоритмов (29)

Для алгоритмов (29) доказано тождество

$$algorithm_D_i(\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$
$$method_D_i(\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\quad .$$

APLAN - процедуры (30) и результаты их исследования доказывают.

1. Алгоритмы $algorithm_D_1$, $algorithm_D_2$, $algorithm_D_3$, $algorithm_D_4$ имеют алгебраические преобразования и сложность $O(n^s)$.
2. Алгоритм $algorithm_D_5$ имеет алгебраические преобразования и сложность одной итерации $O(n^s)$.
3. Алгоритм $algorithm_D_6$ имеет алгебраические преобразования и интерполирование и сложность одной итерации — $O(n^s)$.
4. СКА выполняют все преобразования алгоритмов (29).
5. СКА выполняют все преобразования алгоритмов (29) над операндами с рациональными константами точно. Исключение составляет интерполирование в алгоритме $algorithm_D_6$.

18. Оценка эффективности метода 1

Для решения задачи Коши для ЛДУМК (6), (4) по методу 1 (19)

$$y_n \;=\; method_D_1(\; A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \;=$$

$$solve(\; A\cdot y_n^{(k)} + D[y_n] + G + \tau_1\cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p}\cdot T_m(z) = 0\,,$$

$$init_cond(y_n,d)\,,\quad y_n\in P_n = ?\,,\; \tau_1,\ldots,\tau_{m-p} = ?\;)\,,$$

$$\text{где}\quad T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\;,\quad z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,,$$

и по проекционному методу 1

$$u_p = solve(\; S_p[A\cdot u_p + D[V^k[u_p]] + D[P_{k-1}] + G] = 0\,,\; u_p\in L_2^p(a,b;\rho) = ?\;)\,,$$

$$\text{где}\quad (u_p\in L_2^p(a,b;\rho) = ?) = \; a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\;,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$\text{доказано тождество (12)}\qquad y_n = V^k[u_p] + P_{k-1}\,.$$

Это тождество доказывает тождество (12) для полинома (5)

$$y_n \;=\; method_D_i(\; f(x,y,y',\ldots,y^{(k)}) = 0\,,\; init_cond(y,d)\,,\; [a,b]\,,\; n\;) \;=$$

$$method_D_1(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

где $A\cdot y^{(k)}+D[y]+G=D_i(\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k)})\ )\,,\ \ D_i\ =\ D_2\vee D_3\vee D_4\vee D_5\vee D_6\ ,$ и полинома (11) — результата преобразования по проекционному методу 1 интегрального эквивалента для задачи Коши для ЛДУМК (6), (4) метода 1

$$u_p=solve(\ S_p[A\cdot u_p+D[V^k[u_p]]+D[P_{k-1}]+G]=0\,,\ u_p\in L_2^p(a,b;\rho)=?\ )\,.$$

Следовательно. В пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен коэффициент оптимальности

$$\|(y-y_n)^{(k)}\|_{C_{[a,b]}}\ /\ E_{n-k,C_{[a,b]}}[y^{(k)}]\ =\ \|u-u_p\|_{C_{[a,b]}}\ /\ E_{p,C_{[a,b]}}[u]$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (3), (4) для дифференциального уравнения класса $D_{i,C_{[a,b]}}\subset D_i\,,\ i=1,\ldots,6$ в ее решение $y(x)$ преобразованием по методу $method_D_i$ входа (1) с этой задачей Коши (3), (4) в полином $y_n\,.$

Класс $D_{i,C_{[a,b]}}$ задач Коши (3), (4) для дифференциальных уравнений типа $D_i\,,\ i=1,\ldots,6$ определяет проекционный метод 1.

Оператор S_p проекционного метода 1 в пространстве $C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)$ имеет аппроксимационные характеристики близкие к наилучшим для операторов проектирования в пространство алгебраических полиномов порядка p [5].

Заключение

Процедуры системы APS (30)

$$procedure_D_1 \ , \quad procedure_D_2 \ , \quad procedure_D_3 \ , \quad procedure_D_4 \ , \quad procedure_D_5 \ , \quad procedure_D_6$$

эффективно решают задачу Коши для ЛДУМК (6), (4)

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \, , \quad init_cond(y, d) \, ,$$

системы задач Коши для ЛДУМК типа $D_2 \, , \ D_3 \, , \ D_4$
и задачу Коши для ЛДУМК дополненных нелинейностью $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$
алгебраическим полиномом — типа D_5 и фукцией — типа D_6 (17)

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \, , \quad init_cond(y, d) \, .$$

Результаты исследования этих процедур доказывают следующие утверждения.

Вывод 1. *Метод разработки процедур (30) — эффективное инструментальное средство для разработки программ СКА для решения функциональных уравнений*

$$F[y] = 0 \ , \qquad solve(\ \ F[y] = 0 \ , \ \ y = ? \ ) = y(x) \ , \ \ x \in [a, b] \ .$$

Вывод 2. *Задачу Коши для линейного дифференциальноого уравнения (13)*

$$A(x)\cdot y^{(k)}(x)+B(x)\cdot y^{(k-1)}(x)+\cdots+C(x)\cdot y(x)+G(x)=0$$

типа D_L *, где коэффициенты — полиномы аргумента* x *и функций*

$$A=A(x,f_1,\ldots,f_s)\,,\ B=B(x,f_1,\ldots,f_s)\,,\ldots,\ G=G(x,f_1,\ldots,f_s)\,,$$

— решений задач Коши для ЛДУМК

$$f_1=solve(\ A_1\cdot y^{(k)}+D_1[y]+G_1=0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y=?\ ),\ldots,$$

$$f_s=solve(\ A_s\cdot y^{(k)}+D_s[y]+G_s=0\,,\ init_cond_s(y,d)\,,\ y=?\ )\,,$$

решают процедуры построенные по методу $method_D_L$

$$y_n\ =\ method_D_L(\ A\cdot y^{(k)}+B\cdot y^{(k)}+\cdots+G=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,,$$

$$A=A(x,f_1,\ldots,f_s)\,,\ B=B(x,f_1,\ldots,f_s)\,,\ldots,\ G=G(x,f_1,\ldots,f_s)\,,$$

$$f_1=solve(\ A_1\cdot y^{(k)}+D_1[y]+G_1=0\,,\ init_cond_1(y,d)\ \ y=?\ ),\ldots,$$

$$f_s=solve(\ A_s\cdot y^{(k)}+D_s[y]+G_s=0\,,\ init_cond_s(y,d)\ \ y=?\ )\ \ )\ =$$

$$
\begin{gathered}
(\ f_{1,n} \ = \ method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,, \\
\cdots \\
f_{s,n} \ = \ method_D_1(\ A_s \cdot y^{(k)} + D_s[y] + G_s = 0\,,\ init_cond_s(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,, \\
LDUMK = subs(\ (f_1 = f_{1,n}, \ldots, f_s = f_{s,n}), A \cdot y^{(k)} + B \cdot y^{(k)} + \cdots + G = 0\,)\,, \\
y_n \ = \ method_D_1(\ LDUMK\,,\ init_cond(y,d)\,,\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )\,.
\end{gathered}
$$

Такая APLAN - процедура состоит из операторов процедур (30).

Вывод 3. *Задачу Коши для линейного дифференциального уравнения типа* D_L *(13), дополненного нелинейностью* $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *— алгебраическим полиномом или фукцией*

$$
A(x) \cdot y^{(k)}(x) + B(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x) \cdot y(x) + G(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\,,
$$

где коэффициенты — полиномы аргумента x *и решений задач Коши для ЛДУМК, решают процедуры построенные по композиции методов*

$$
method_D_L\,,\ \ method_D_5\,,\ \ method_D_6\,.
$$

Такая APLAN - процедура состоит из операторов процедур (30).

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 3

Программа для решения задачи Коши для ЛДУМК

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ = \quad (1)$$

$$c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \quad (2)$$

Эта процедура преобразует задачу Коши для ЛДУМК — систему уравнений:
— линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ )\ =$$

$$(\ A(x) \cdot y^{(k)}(x) + B(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x) \cdot y(x) + G(x) = 0\ )\,, \quad (3)$$

— начальные условия

$$init_cond(y,d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,, \ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \}\,. \quad (4)$$

Коэффициенты $A(x)\,,\ B(x)\,, \ldots,\ C(x)$ *и свободный член* $G(x)$ *уравнения (3) — алгебраические полиномы.*

2. Метод 1 — выполняет преобразование (1), (2)

$$y_n = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ = \tag{5}$$

$$solve(\ \ init_cond(y_n \in P_n = ?\,,\ d)\ \ , \tag{6}$$

$$A\cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )\,. \tag{7}$$

Метод 1 — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2].

Эта алгоритмизация основана на a - методе Дзядыка [3].

Неизвестные уравнений (7), (6) — (символьные) коэффициенты полиномов

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n\cdot x^n\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} = ?\,, \tag{8}$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1\cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p}\cdot T_m(z)\,, \tag{9}$$

где $\{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} \in Atom\,,\ \ \{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} = ?\,,$ параметры

$$m = \deg(A(x)\cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G(x)\ )\ ,\quad p = n-k\,, \tag{10}$$

и $T_i(z)$ — полиномы Чебышева первого рода, перенесенные на отрезок $[a,b]$

$$T_i(z) = \cos(i\cdot \arccos(z))\,,\qquad i = 0,1,\ldots\,,\qquad z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,. \tag{11}$$

3. Интегральный эквивалент для задачи Коши (3), (4)

Начальные условия (4) определяют подстановку

$$subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,)\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Эта подстановка преобразует ЛДУМК (3) в линейное интегральное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛИУМК) Вольтерра

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,, \tag{12}$$

где $g = G + D[P_{k-1}]\,.$

Уравнение (12) имеет решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $y(x)$ задача Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$y(x) = V^k[u(x)] + P_{k-1}\,,\quad u(x) = y^{(k)}(x)\,.$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$u_p = G_method_I_1(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =$$
$$solve(\ S_p[\ A \cdot (\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ ) + D[V^k[\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ ]] + g\ ] = 0\ )\,. \quad (13)$$

Неизвестные уравнения (13) — (символьные) коэффициенты полинома

$$(\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ ) = a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\,,\ \{a_0,\ldots,a_p\} \in Atom\,. \quad (14)$$

Ортогональный базис пространства Гильберта $L_2(a,b;\rho)$ (11)

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,, \qquad i = 0,1,\ldots\,, \qquad z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Пространство $L_2^p(a,b;\rho) \subset L_2(a,b;\rho)$ и имеет базис $T_i(z)\,,\ i = 0,\ldots,p$ (11) — подпространство пространства Гильберта $L_2(a,b;\rho)\,.$

Оператор S_p [5] (с. 70) этого метода проектирует пространство $L_2(a,b;\rho)$ в пространство $L_2^p(a,b;\rho)$ и преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$.

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,. \quad (15)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачу Коши для ЛДУМК (3), (4) $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,d)$ применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши для ЛДУМК в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (13) в пространстве $C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots$ определяют аппроксимационные характеристики оператора S_p (15).

$$A = 1 \ \rightarrow\ \|u - u_p\|_X = (1 + o(1)) \cdot \|u - S_p[u]\|_X\,,\quad X = C_{[a,b]} \ \vee\ L_2(a,b;\rho)\,.$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгоритм 1 решения задачи Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \quad (16)$$

1. Преобразовать ЛДУМК (3) $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0$ в его оператор

$$F[y] = A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\ . \quad (17)$$

2. Вычислить полином (8)

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\ \ \{c_0,\ c_1, \ldots, c_n\} \in Atom\ .$$

3. Преобразовать оператором $F[y]$ (17) полином $y_n \in P_n = ?$ (8) в полином

$$F[y_n \in P_n = ?] = subs(\ y = (y_n \in P_n = ?)\ ,\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\ )\ =$$
$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G = \quad (18)$$
$$f_0 + f_1 \cdot x + \cdots + f_i \cdot x^i \cdots + f_m \cdot x^m\ ,$$

где $f_i = f_i(\ c_0, \ldots, c_n\ ) = t_i(\ f_0 + f_1 \cdot x + \cdots + f_i \cdot x^i \cdots + f_m \cdot x^m\ ) =$

$$t_i(\ A\cdot(y_n\in P_n=?)^{(k)}+D[y_n\in P_n=?]+G\ )\,.$$

4. Вычислить порядок m (10) многочлена $F[y_n\in P_n=?]$ (18).

$$m=\deg(A(x)\cdot(y_n\in P_n=?)^{(k)}+D[y_n\in P_n=?]+G(x)\ )\,.$$

5. Вычислить порядок k ЛДУМК (3).
6. Вычислить параметр $p=n-k$ (10) уравнения (7).
7. Вычислить элемент пространства $L_2^{m\backslash p}(-1,1;\rho)$ — полином

$$(\ E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(-1,1;\rho)=?\ )=\tau_1\cdot T_{p+1}(x)+\cdots+\tau_{m-p}\cdot T_m(x)\ , \qquad (19)$$

где коэффициенты $\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\in Atom$ (символьные).

8. Вычислить многочлен $z(x)=2\cdot(x-a)/(b-a)-1$.
9. Вычислить полином $E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho)=?$ (9) — перенести полином $E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(-1,1;\rho)=?$ (19) с отрезка $[-1,1]$ на отрезок $[a,b]$

$$(\ E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho)=?\ )=subs(x=z(x),(\ E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(-1,1;\rho)=?\ ))\ =$$

$$e_0+e_1\cdot x+\cdots+e_i\cdot x^i\cdots+e_m\cdot x^m\ ,\quad \text{где}\quad e_i=e_i(\ \tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\ )=$$

$$t_i(\ e_0 + e_1 \cdot x + \cdots + e_i \cdot x^i \cdots + e_m \cdot x^m\ ) = t_i(\ E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?\ )\,.$$

10. Вычислить сумму полиномов (18) и (9) — аппроксимацию оператора (17)

$$F[y] = A \cdot y^{(k)} + D[y] + G \qquad \text{по методу 1}$$

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) =$$

$$f_0 + f_1 \cdot x + \cdots + f_i \cdot x^i \cdots + f_m \cdot x^m + e_0 + e_1 \cdot x + \cdots + e_i \cdot x^i \cdots + e_m \cdot x^m\,. \quad (20)$$

11. Преобразовать полином (20) в систему уравнений $S =$

$$\{\ t_i(\ A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ )\ \}_{i=0}^{m} =$$

$$S[\ c_0, \ldots, c_n,\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-n}\ ] = \{\ f_i(\ c_0, \ldots, c_n\ ) + e_i(\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-p}\ ) = 0\ \}_{i=0}^{m}\,. \quad (21)$$

Неизвестные уравнений (21) — (символьные) коэффициенты полиномов (8), (9)

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\quad \{c_0,\ c_1, \ldots, c_n\} \in Atom\ ,$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1 \cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,.$$

12. Преобразовать полином $y_n \in P_n = ?$ (8) и начальные условия $init_cond(y, d)$ (4) в систему уравнений $init_cond(y_n \in P_n = ?,\ d)$ (6).
Неизвестные уравнений (6) — (символьные) коэффициенты полинома (8)

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\quad \{c_0,\ c_1, \ldots, c_n\} \in Atom\ .$$

13. Объединить системы уравнений S (21) и $init_cond(y_n \in P_n = ?,\ d)$ (6).

14. Преобразовать объединение систем уравнений $S[\ c_0, \ldots, c_n,\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-p}\ ]$ (21) и $init_cond(y_n \in P_n = ?,\ d)$ (6) в их решение — значения

$$Coef = \{\ c_0(n), \ldots, c_n(n)\ ,\ \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)\ \} =$$

$$solve(\ S[\ c_0, \ldots, c_n,\ \tau_1, \ldots, \tau_{m-p}\ ],\ init_cond(y_n \in P_n = ?,\ d)\ ) \qquad (22)$$

неизвестных этих систем:
$c_0, \ldots, c_n$ — коэффициентов полинома $y_n \in P_n = ?$ (8) и
$\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$ — коэффициентов полинома $E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?$ (9).

15. Преобразовать значения $c_0(n), \ldots, c_n(n)$ (22) коэффициентов $c_0, \ldots, c_n$ полинома y_n (16) вида (2) $y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n$ в этот полином

$$y_n = ser(\ c_0(n), \ldots, c_n(n),\ \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)\ ) = c_0(n) + \cdots + c_n(n) \cdot x^n\ . \quad (23)$$

7. Вход (1) для APLAN - процедуры 1

$$\texttt{(LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n)} \qquad (24)$$

$$\sim \quad (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 ,\ init_cond(y,\ d) ,\ [a, b] ,\ n) .$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.
Уравнение

```
LDUMK :=
```

```
( A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1) + ··· + C * y + G = 0 );
```  (25)

— APLAN - эквивалент для ЛДУМК (3)

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0) \ =$$

$$(A(x) \cdot y^{(k)}(x) + B(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x) \cdot y(x) + G(x) = 0) .$$

Начальная точка `InitPoint := d ;` и **условия**

```
init_cond :=
```

```
( y = Y_0 , dif(y , 1) = Y_1 , ... , dif(y , k-1) = Y_{k-1} ) ;   (26)
```

— APLAN - эквивалент для начальных условий (4)

$$init_cond(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_0\,,\; y'(d) = Y_1\,, \ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\;\}\,.$$

`interval := (a, b)` $\sim$ $[a,b]$. Отрезок аппроксимации.

`n` $\sim$ $n \in N$. Порядок полинома y_n (16).

Составляющие уравнения (25) и условий (26).

Атомы `y` , `x`

— APLAN - эквивалент для искомой функции y и ее аргумента x .

```
NAME  A , B ,..., C , G :
```

— Термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `*` , `+` , `^` .
— APLAN - эквивалент для полиномов $A(x)$, $B(x)$,..., $C(x)$, $G(x)$.

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_1$

```
let( LDUMK , Dy = 0 );   /* F[y] = A*y^{(k)} + D[y] + G  */
k   := ord_equ( Dy );                  /*  порядок  Dy  */
y_n := main_pol(n);                    /*  y_n \in P_n  */
Dn  := canplf(sub_du(Dy , y_n));            /*  F[y_n]  */
m  := deg(canplf(ein_pol(Dn)));       /*  deg( F[y_n] )  */
p := n - k;
Em := Enl(n,m-p,k);                   /*  E_{m,p}[-1,1]  */
b := arg(interval , 2); a := arg(interval , 1); h := b - a;
z := canplf((2/h) * (x + (-1) * a) + -1);      /*  z(x)  */
Em --> canplf( subs( x = z, Em ));     /*  E_{m,p}[a,b]  */
F_m := Em + Dn;               /*  F[y_n] + E_{m,p}[a,b]  */
SD := pol_equ( F_m , m ); /* t_i(F[y_n]+E_{m,p}[a,b])=0  */
S := init_sys(y_n, InitPoint, init_cond); /* y_n(d)=Y_0,.*/
S --> conc(S , SD);           /* аппроксим. задачи Коши  */
Xn := c;    Coef := solve(S);     /*  коэффициенты  y_n  */
y_n := ser(n , Coef);          /*  аппроксимация  y(x)  */
```

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y' = y\ , \qquad y(0) = 1\ , \qquad x \in [-1, 1]\ . \tag{27}$$

Задача Коши (27) — модельная задача метода ряда Чебышева [5].

Описание на языке APLAN задачи Коши (27).

```
process[1] := (
                  LDUMK := ( dif(y , 1) + -1 * y = 0 ) ;
              InitPoint := 0 ;
              init_cond := ( y = 1 ) ;
               interval := (-1 , 1) ;
                ... );
```
(28)

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (28)

$$n = 2\,.$$

```
let( LDUMK, Dy = 0 );                Dy = dif(y , 1) + -1 * y ;
k := ord_equ(Dy) =                                          1 ;
y_n := main_pol(n) =              c 2 * x ^ 2 + c 1 * x + c 0 ;
Dn := canplf(sub_du(Dy , y_n)) =             c 2 * x ^ 2 $ -1 +
                  c 2 * x $ 2 + c 1 * x $ -1 + c 1 + c 0 $ -1 ;
m := deg(canplf(ein_pol(Dn))) =                             2 ;
p := n - k =                                                1 ;
E_m := Enl( n, m - p, k ) =        c 3 * x ^ 2 $ 2 + c 3 $ -1 ;
a =                                                        -1 ;
b =                                                         1 ;
h =                                                         2 ;
z =                                                         x ;
E_m --> canplf(subs(x = z, E_m)) = c 3 * x ^ 2 $ 2 + c 3 $ -1 ;
```

```
F_m := E_m + Dn =                    c 3 * x ^ 2 $ 2 + c 3 $ -1 +
c 2 * x ^ 2 $ -1 + c 2 * x $ 2 + c 1 * x $ -1 + c 1 + c 0 $ -1;
SD := pol_equ( F_m , m ) =    ( c 3 $ -1 + c 1 + c 0 $ -1 = 0 ,
                                  c 2 $ 2 + c 1 $ -1 = 0 ,
                                c 3 $ 2 + c 2 $ -1 = 0 ) ;
S := init_sys( y_n, InitPoint, init_cond ) =      ( c 0 = 1 ) ;
S --> conc( S , SD ) := (       c 0 = 1 ,
                                c 3 $ -1 + c 1 + c 0 $ -1 = 0 ,
                                c 2 $ 2 + c 1 $ -1 = 0 ,
                                c 3 $ 2 + c 2 $ -1 = 0 ) ;
Xn := c; Coef := solve( S ) =      ( c 0 = 1 , c 3 = rat(1,3) ,
                             c 2 = rat(2,3) , c 1 = rat(4,3) ) ;
y_n := ser(n, Coef) =     1 + rat(4,3) * x + rat(2,3) * x ^ 2 ;
```

Замечание 1. Оператор `prn` солвера *gr_solve.exe* системы APS выводит атом с одним индексом `c( i )` без скобок около этого индекса — в виде `c i`. Поэтому, в приведенных выше результатах, оператор *prn* вывел атомы `c( 0 )` , `c( 1 )` , `c( 2 )` , `c( 3 )` в виде `c 0` , `c 1` , `c 2` , `c 3` .

11. Наилучшее приближение решения задачи Коши (27)

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y = ?\ )\ . \qquad (29)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $\exp(x)$ (решения задачи Коши (27)) на отрезке $[-1,1]$ принимают следующие значения

$$\{a_i(\exp(x),[-1,1])\}_{i=1}^{15} = \{1.13,\ 0.27,\ 0.044,\ 0.0054,\ 0.00054,\ 4.5\cdot 10^{-5},\ 3.2\cdot 10^{-6},$$

$$2\cdot 10^{-7},\ 1.1\cdot 10^{-8},\ 5.5\cdot 10^{-10},\ 2.5\cdot 10^{-11},\ 10^{-12},\ 4\cdot 10^{-14},\ 1.4\cdot 10^{-15},\ 10^{-16}\}\ . \qquad (30)$$

Коэффициенты (30) регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$a_n(\exp(x),[-1,1]) = (1+\gamma_n)\cdot 2^{-n}\cdot t_n(\ \exp(x)\ ) = (1+\gamma_n)\cdot 2^{-n}/n!\ ,$$
$$a_{n+1}(\exp(x),[-1,1])/a_n(\exp(x),[-1,1]) = \beta_n =$$
$$(1+\gamma_{n+1})/(1+\gamma_n)/(2\cdot(n+1)) \approx 1/(n+1)/2\ ,\ \text{где}\ \{\ \beta_n\ ,\ n = 1,\ldots,13\ \} =$$
$$\{\ 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\ \}\ .$$

Функция $\exp(x)$ — целая. Норма многочлена Чебышева тождественна 1.

$$\|\cos(i\cdot\arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i\cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств и тождества (30) следуют утверждения.

Вывод 1. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\, E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,)$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\, \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}}\,) \,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; (1+\delta_n) \cdot a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;, \quad (31)$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1) \;, \qquad \{\; \beta_n \;,\; n = 1,\ldots,13 \;\} =$

$\{\; 0.24,\; 0.16,\; 0.12,\; 0.1,\; 0.08,\; 0.07,\; 0.06,\; 0.055,\; 0.05,\; 0.045,\; 0.042,\; 0.038,\; 0.032 \;\}$.

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \; = \; C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$y(x) = solve(\; y' = y \,,\; y(0) = 1 \,,\; y = ?\;) = \exp(x)$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_1(\;\texttt{LDUMK}\;,\;\texttt{init_cond}\;,\;\texttt{InitPoint}\;,\;\texttt{interval}\;,\;\texttt{n}\;) =$$

$$y_n = procedure_D_1(\; y' = y \,,\; y(0) = 1 \,,\; [-1,1] \,,\; n \;) \qquad (32)$$

имеет главную часть $\Theta(\; C_n \;)$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \; = \; \Theta(\; C_n \;) \,.$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \; =$$

$$(1 + \delta_n) \; \cdot \; \| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \,. \qquad (33)$$

Вывод 3. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(x)] = \max\{$$

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \,,\; \inf_{c_0,\dots,c_n} \| (\exp(x))' - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)' \|_{C_{[-1,1]}} \}$$

имеет главную часть $\Theta(\, E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,)$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* n *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_n(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\, \inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \,) \,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \;=\; (1 + \delta_{n-1}) \cdot a_n(\exp(x),[-1,1]) \;,$$

$$\text{где} \qquad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1) \;, \qquad \{\; \beta_n \;,\; n = 1,\dots,13 \;\} =$$

$$\{\; 0.24,\; 0.16,\; 0.12,\; 0.1,\; 0.08,\; 0.07,\; 0.06,\; 0.055,\; 0.05,\; 0.045,\; 0.042,\; 0.038,\; 0.032 \;\} \,.$$

Вывод 4. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \;=\; C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$y(x) = solve(\; y' = y \,,\; y(0) = 1 \,,\; y = ?\;) = \exp(x)$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_1(\; y' = y \,,\; y(0) = 1 \,,\; [-1,1] \,,\; n \;)$$

имеет главную часть $\Theta(\; C^1_n \;)$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \; / \; a_n(\exp(x), [-1,1]) \;=\; \Theta(\; C^1_n \;) \; .$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \; / \; a_n(\exp(x), [-1,1]) \;=$$

$$(1 + \delta_{n-1}) \;\cdot\; \| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \; .$$

12. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[-1,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции (29)

$$y(x) = solve(\ y' = y\,,\ y(0) = 1\,,\ y = ?\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (27) — полиномом (32)

$$y_n = procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ ) =$$

$$y_n = procedure_D_1(\ y' = y\,,\ y(0) = 1\,,\ [-1,1]\,,\ n\ )$$

(результатом преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\|\exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{14} = \{0.72,\ 0.28,\ 0.044,\ 0.0018,\ 0.00029,\ 9.1\cdot 10^{-6},\ 1.3\cdot 10^{-6},$$

$$2.8\cdot 10^{-8},\ 3.5\cdot 10^{-9},\ 5.8\cdot 10^{-11},\ 6.4\cdot 10^{-12},\ 8.6\cdot 10^{-14},\ 8\cdot 10^{-15},\ 4\cdot 10^{-16}\}\,. \quad (34)$$

Из этого тождества, вывода 2 и тождества (30) следует утверждение.

Вывод 5. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$y(x) = solve(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y = ?\ ) = \exp(x)$$

преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)

$$y_n = procedure_D_1(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ [-1,1]\ ,\ n\ )$$

(содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) *принимает значения*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} / a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) = A_n\ , \qquad \text{где} \qquad (35)$$

$$\begin{array}{rcl} \{\ A_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^{6} & = & \{\ 6,\ 3,\ 2.8,\ 2.6,\ 2.3,\ 2.25\ \}\ , \\ \{\ A_{2\cdot i+1}\ \}_{i=0}^{6} & = & \{\ 2,\ 8,\ 6.5,\ 6.5,\ 6.4,\ 6.3,\ 6.25\ \}\ . \end{array}$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^1_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции (29)

$$y(x) = solve(\ y' = y\,,\ y(0) = 1\,,\ y = ?\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (27) — полиномом (32)

$$y_n = procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ ) =$$

$$y_n = procedure_D_1(\ y' = y\,,\ y(0) = 1\,,\ [-1,1]\,,\ n\ )$$

(результатом преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\ \|\exp(x) - y_n\|_{C^1_{[-1,1]}} = \|\exp(x)' - y_n'\|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=2}^{12} = \{0.38,\ 0.069,\ 0.0064,\ 8\cdot 10^{-4},$$

$$4.7\cdot 10^{-5},\ 4.3\cdot 10^{-6},\ 2.1\cdot 10^{-7},\ 1.4\cdot 10^{-8},\ 5.6\cdot 10^{-10},\ 2.6\cdot 10^{-11},\ 1.1\cdot 10^{-12}\}\ .\quad (36)$$

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (30) следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ a_n(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^1_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \ = \ C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$y(x) = solve(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y = ?\ ) = \exp(x)$$

преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)

$$y_n = procedure_D_1(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ [-1,1]\ ,\ n\ )$$

(содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) *принимает значения*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = 1 + \alpha_n\ , \qquad (37)$$

где $\{\alpha_n\}_{n=2}^{12} = \{\ 0.3,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.04,\ 0.5,\ 0.05,\ 0.3,\ 0.02,\ 0.04,\ 0.001\ \}$.

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 7. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\| \exp(x) - y'_n(x) \|_{C_{[-1,1]}}$ *(37) производной решения задачи Коши (27)*

$$y'(x) = (\exp(x))' = \exp(x) = solve(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y = ?\ )$$

производной результата преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)

$$y'_n(x) = d/dx(\ procedure_D_1(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ [-1, 1]\ ,\ n\ )\ )$$

имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[-1,1]}$ *) приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* $n - 1$

$$\Theta(\ \| \exp(x) - y'_n(x) \|_{C_{[-1,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\ldots,c_{n-1}} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1}) \|_{C_{[-1,1]}} .$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y'_n(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\ldots,c_{n-1}} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1}) \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ (1 + \delta_{n-1}) .$$

В пространстве $C_{[-1,1]}$ полиномы $y'_n\ ,\ n = 1, \ldots, 12$ (32) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $\exp(x)$.

Этот факт заметил еще Ланцош [2].

13. APLAN - процедура 1 и метод ряда Чебышева [5]

Задача Коши (27) преобразована в аппроксимацию коэффициентов ряда Фурье - Чебышева функции $\exp(x)$ [5] (с. 293 — 295). Компьютерные программы этих преобразований реализуют методы Ланцоша и Миллера. Метод Миллера — один из наиболее точных методов ряда Чебышева. Программа реализующая метод Миллера вычислила [5] (с. 293 — 295) коэффициенты полинома

$$y_{5,Miller}(x) = method_Miller(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ n = 5\ )\ .$$

Погрешность аппроксимации этим полиномом решения (29) задачи Коши (27)

$$\| \exp(x) - y_{5,Miller}(x) \|_{C_{[-1,1]}} = 0.0001734 \qquad [5]\ (\text{с. } 295)\ .$$

Из этого тождества, вывода 2 и тождества (30) следует утверждение.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_{5,Miller}(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ /\ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \quad = \quad \Theta(\ C_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_{5,Miller}(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ /\ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \quad = \quad C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$y(x) = solve(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ y = ?\ ) = \exp(x)$$

преобразованием этой задачи Коши по методу Миллера [5]

$$y_{5,Miller}(x) = method_Miller(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ n\ )$$

в случае $n = 5$ *принимает значение*

$$\|\exp(x) - y_{5,Miller}(x)\|_{C_{[-1,1]}}/a_6(\exp(x),[-1,1]) = 0.0001734/4.5 \cdot 10^{-5} \approx 4\ .$$

Согласно вывода 6. Это значение больше главной части (37)

$$\|\exp(x) - y_n\|_{C^1_{[-1,1]}}/a_n(\exp(x),[-1,1]) = 1 + \alpha_n\ \le\ 1.6\,,\quad n = 2,\ldots,12,$$

коэффициента оптимальности $\|\exp(x) - y_n\|_{C^1_{[-1,1]}}/E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\ \exp(x)\ ]$ аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение $\exp(x)$ (29) преобразованием (32) процедурой 1 входа (28) в пространстве $C^1_{[-1,1]}$

$$y_n = procedure_D_1(\ y' = y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ [-1,1]\ ,\ n\ )\ .$$

Из этих значений коэффициента оптимальности следует утверждение.

Вывод 9. *Метод Миллера [5] преобразования задачи Коши (27)*

$$(\ F[y]=0\ ) = (\ y'=y\ ,\quad y(0)=1\ )$$

в алгебраический полином порядка $n=5$ *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y]=0\,,\quad solve(\ F[y]=0\,,\ y=?\ ) = y(x)\,,\quad x\in[a,b]\,,\quad y(x)\in X\,,$$

где пространство $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ldots,$ *в полином порядка* n

$$y_n = method(\ F[y]=0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =\ c_0+c_1\cdot x+\cdots+c_n\cdot x^n\,.$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности в пространстве X

$$\|y-y_n\|_X\ /\ \inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_X$$ *аппроксимации*

преобразования (функции) $y(x) = solve(\ F[y]=0\,,\ y=?\ )\,,\ x\in[a,b]$

преобразованием (полиномом) $y_n = method(\ F[y]=0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$

14. Вид уравнений системы (21)

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1 (16)*

$$y_n = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

имеет ЛДУМК (3) и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда уравнения системы (21) $S =$

$$S[\ c_0,\dots,c_n,\ \tau_1,\dots,\tau_{m-n}\ ] = \{\ f_i(\ c_0,\dots,c_n\ ) + e_i(\ \tau_1,\dots,\tau_{m-p}\ ) = 0\ \}_{i=0}^{m} =$$

$$\{\ t_i(\ A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ ) = 0\ \}_{i=0}^{m}$$

— линейные, алгебраические и имеют вид

$$\{\ f_i(\ c_0,\dots,c_n\ ) + e_i(\ \tau_1,\dots,\tau_{m-p}\ ) = 0\ \}_{i=0}^{m} =$$

$$t_i(A)\cdot k!\cdot c_k + \dots + t_i(A\cdot x^{n-k})\cdot n!/(n-k)!\cdot c_n +$$

$$t_i(D[1])\cdot c_0 + \dots\ + t_i(D[x^n])\cdot c_n + t_i(G) +$$

$$t_i(T_{p+1}(z(x))\cdot\tau_1 + \dots + t_i(T_m(z(x))\cdot\tau_{m-p}\ =\ 0\,,\quad i = 0,\dots,m\,.$$

Доказательство. Функционал t_i — линейный.

Следовательно. Первое слагаемое уравнений (21) имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} f_i(\,c_0,\ldots,c_n\,) & & & & = \\ t_i(\,A\cdot(y_n\in P_n=?)^{(k)} & + & D[y_n\in P_n=?] & + & G\,) \quad = \\ t_i(\,A\cdot(y_n\in P_n=?)^{(k)}\,) & + & t_i(\,D[y_n\in P_n=?]\,) & + & t_i(\,G\,) \quad , \end{array}$$

где

$$\begin{array}{rcl} t_i(A\cdot(y_n\in P_n=?)^{(k)}) & = & t_i(A)\cdot k!\cdot c_k \;+\cdots+\; t_i(A\cdot x^{n-k})\cdot n!/(n-k)!\cdot c_n\ , \\ D[y_n\in P_n=?] & = & c_0\cdot D[1] \;+\cdots+\; c_n\cdot D[x^n]\ , \\ t_i(\,D[y_n\in P_n=?]\,) & = & t_i(D[1])\cdot c_0 \;+\cdots+\; t_i(D[x^n])\cdot c_n\ . \end{array}$$

Следовательно. Первое слагаемое уравнений (21) имеет вид

$$f_i(\,c_0,\ldots,c_n\,)=t_i(A)\cdot k!\cdot c_k+\cdots+t_i(A\cdot x^{n-k})\cdot n!/(n-k)!\cdot c_n+$$
$$t_i(D[1])\cdot c_0+\cdots\;+t_i(D[x^n])\cdot c_n+t_i(G)\,.$$

Второе слагаемое уравнений (21) имеет вид

$$\begin{array}{ccc} e_i(\,\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\,) & = & t_i(\,E_{m,p}\in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho)=?\,) \;= \\ t_i(\,T_{p+1}(z(x))\,)\cdot\tau_1 & +\cdots+ & t_i(\,T_m(z(x))\,)\cdot\tau_{m-p} \quad . \end{array}$$

15. Вид уравнений системы (6)

Лемма 2. *Пусть вход алгоритма 1 (16)*

$$y_n = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

имеет начальные условия (4) и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда уравнения системы (6) $init_cond(y_n \in P_n = ?\ , d)\ =$

$$\{\ (y_n \in P_n = ?)|_{x=d} = Y_0\ ,\ \ldots,\ (y_n \in P_n = ?)^{(k-1)}|_{x=d} = Y_{k-1}\ \}$$

линейные, алгебраические и имеют вид

$$c_i \cdot i! + c_{i+1} \cdot \left(x^{i+1}\right)^{(i)}|_{x=d} + \cdots + c_n \cdot \left(x^n\right)^{(i)}|_{x=d} = Y_i\ , \quad i = 0, \ldots, k-1\ .$$

Доказательство. Для производных полинома (8) справедливо тождество

$$(y_n \in P_n] = ?)^{(i)} = c_i \cdot i! + c_{i+1} \cdot \left(x^{i+1}\right)^{(i)} + \cdots + c_n \cdot \left(x^n\right)^{(i)}\ .$$

Следовательно. Левая часть уравнения i системы (6) имеет вид

$$(y_n \in P_n])^{(i)}|_{x=d} = c_i \cdot i! + c_{i+1} \cdot \left(x^{i+1}\right)^{(i)}|_{x=d} + \cdots + c_n \cdot \left(x^n\right)^{(i)}|_{x=d}\ .$$

16. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора `let( LDUMK , Dy = 0 )`

`Dy := A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1) + ··· + C * y + G ;`

— APLAN - эквивалент для оператора (17) $F[y] = A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$.

Выход оператора `k := ord_equ(Dy) = ord_equ( A * dif(y , k) )`

— порядок производной первого слагаемого оператора `Dy`.

Выход оператора `y_n := main_pol(n);`

`c( n ) * x ^ n +···+ c( 1 ) * x + c( 0 )` ,

где аргумент `x` и коэффициенты `c( 0 ),...,c( n )` — атомы,

— APLAN - эквивалент для полинома (8)

$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n$, $\{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom$ ($\{c_0, \ldots, c_n\} = ?$) .

Выход оператора `sub_du( Dy , y_n )`

`A * nd_x(y_n , k) + B * nd_x(y_n , k-1) + ··· + C * y_n + G` ,

— APLAN - эквивалент для полинома (18)

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[(y_n \in P_n = ?)] + G$$

и имеет APLAN - эквиваленты для производных полинома $y_n \in P_n$ (8) —

`nd_x(y_n, i) = c(n) * n*...*j * x ^ j +...+ c(i) * i!` $\sim (y_n \in P_n)^{(i)}$.

Оператор `canplf`

преобразует полином в упорядоченную сумму мономов без скобок.

Выход оператора `Dn := canplf( sub_du( Dy , y_n ) )`
— сумма мономов вида

`c( i ) * x ^ j $ f` $\sim f \cdot c_i \cdot x^j$, (38)

`x ^ j $ h` $\sim h \cdot x^j$, (39)

где $h = h_j$, $j = 0, \ldots, m$, $f = f_{i,j}$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$.

Выход оператора `m := deg( canplf( ein_pol( Dn ) ) );`
— порядок полинома `Dn` ,

— APLAN - эквивалент для порядка (10) полинома (18)

$$m = \deg(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G\ ) \ .$$

Выход оператора `p := n - k ;`

— APLAN - эквивалент для параметра $p \in N$ (10) уравнения (7).

Выход оператора `E_m := Enl( n , m - p , k ) ;`

`E_m = c( m + k ) * cheb(m, x)` $+ \cdots +$ `c( n + 1 ) * cheb(p + 1, x)` ,

— APLAN - эквивалент для полинома (19)

$$(\ E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(-1, 1; \rho) = ?\ ) = \tau_1 \cdot T_{p+1}(x) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(x)\ ,\ \{\ \tau_i\ \}_{i=1}^{m-p} \in Atom$$

имеет аргумент `x` и коэффициенты `c( n + 1 ),...,c( m + k )` — атомы и оператор `cheb(i, x)` вычисляет эквивалент полинома Чебышева $T_i(x)$,

Выход оператора `subs( x = z , E_m )`

`c( m + k ) * cheb(m, z)` $+ \cdots +$ `c( n + 1 ) * cheb(p + 1, z)` ,

где `z` — APLAN - эквивалент для полинома $2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1$,
— APLAN - эквивалент для полинома

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = \tau_1 \cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z) \,,\ \{\ \tau_i\ \}_{i=1}^{m-p} \in Atom \,.$$

Выход оператора `E_m --> canplf( subs( x = z , E_m ) )`
— сумма мономов вида (38)

$$\texttt{c(i) * x \^{} j \$ f} \ \sim\ f \cdot c_i \cdot x^j \ ,$$

где $f = f_{i,j}$, $i = n+1, \ldots, m+k$, $j = 0, \ldots, m$.

Выход оператора `F_m := E_m + Dn`
— сумма мономов вида (38) и (39), `c( i ) * x ^ j $ f` , `x ^ j $ h` ,
где $i = 0, \ldots, m+k$, $j = 0, \ldots, m$,
— APLAN - эквивалент для полинома (20)

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) \ .$$

Выход оператора `SD := pol_equ( F_m , m ) ;`

— список уравнений вида

```
c( m + k ) $ f  +···+  c( 0 ) $ e + d = 0 ,
```

— APLAN - эквивалент для системы уравнений (21)

$$\{\, t_i(\, A\cdot(y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\,) = 0 \,\}_{i=0}^{m} =$$

$$\{\, t_i(A)\cdot k!\cdot c_k + \cdots + t_i(A\cdot x^{n-k})\cdot n!/(n-k)!\cdot c_n \; + t_i(D[1])\cdot c_0 + \cdots \; +$$

$$t_i(D[x^n])\cdot c_n + t_i(T_{p+1}(z(x))\cdot\tau_1 + \cdots + t_i(T_m(z(x))\cdot\tau_{m-p} + t_i(G) \;= 0\,, \quad i = 0,\ldots,m \,\}.$$

Выход оператора `S := init_sys( y_n , InitPoint , init_cond ) ;`

— список уравнений вида

```
c( n ) $ f  +···+  c( 0 ) $ e + d = 0 ,
```

— APLAN - эквивалент для системы уравнений (6)

$$init_cond(y_n \in P_n = ?\,,\, d) \;=$$

$$\{\; (y_n \in P_n = ?)|_{x=d} = Y_0\,,\; \ldots,\; (y_n \in P_n = ?)^{(k-1)}|_{x=d} = Y_{k-1} \;\} =$$

$$c_i \cdot i! + c_{i+1} \cdot \left(x^{i+1}\right)^{(i)}|_{x=d} + \cdots + c_n \cdot \left(x^n\right)^{(i)}|_{x=d} = Y_i \ , \quad i = 0, \ldots, k-1 \ .$$

Оператор `S --> conc(S , SD);` объединяет списки уравнений `S , SD` .

Выход оператора `Coef := solve( S ) ;`
— список вида

`Coef` $:= ($`c( 0 ) = h`$, \ldots,$`c( n ) = p`$,$ `c( n+1 ) = q`$, \ldots,$`c( m+k ) = r`$),$

— APLAN - эквивалент для решения (22) системы (21)

$$Coef = \{\ c_0(n), \ldots, c_n(n)\ ,\ \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-p}(n)\ \} = \{\ \mathtt{h}, \ldots, \mathtt{p},\ \mathtt{q}, \ldots, \mathtt{r}\ \} \ .$$

Выход оператора `ser(n , Coef)`
— сумма мономов `q * x ^ i` $\sim\ c_i(n) \cdot x^i$, где $i \le n$,

`y_n` $:=$ `ser(n , Coef)` $=$ `h` $+\cdots+$ `p * x ^ n` ,

— APLAN - эквивалент для полинома (23)

$$y_n = ser(\ c_0(n), \ldots, c_n(n),\ \tau_1(n), \ldots, \tau_{m-n}(n)\ ) = c_0(n) + \cdots + c_n(n) \cdot x^n \ .$$

17. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (24)*

$$(\ \texttt{LDUMK}\ ,\ \texttt{init_cond}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ ) \quad \sim$$

$$(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

имеет ЛДУМК (3), условия (4) (их эквивалент) и $n = k + p \in N$. *Тогда:*

1. Преобразование (1) APLAN - процедурой 1 входа (24) в полином (2)

$$y_n = procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK}\ ,\ \texttt{init_cond}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ ) =$$

$$procedure_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

— алгебраическое.

2. Для сложности этого преобразования справедливо тождество

$$Q(\ procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK}\ ,\ \texttt{init_cond}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ )\ ) =$$

$$O(n^3)\ + Q(canplf(A\cdot(y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G))\ +$$
$$Q(canplf(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?))\,.$$

Доказательство. Операторы на языке APLAN процедуры 1

$$main_pol\ ,\ sub_du\ ,\ deg\ ,\ ein_pol\ ,\ Enl\ ,\ pol_equ\ ,\ init_sys\ ,\ ser$$

мы построим и исследуем в следующих лекциях.

Солвер $gr_solve.exe$ системы APS имеет операторы этой процедуры

$$let\ ,\ canplf\ ,\ arg\ ,\ subs\ ,\ solve$$

Эти операторы имеют прототипы на языке APLAN.

Выше мы рассмотрели выходы операторов процедуры $procedure_D_1$ в процессе преобразования входа (24). Эти выходы доказывают.

Процедура 1 преобразует вход (24).

Операторы процедуры $procedure_D_1$ — запись на языке APLAN конечного числа правил преобразования и конечной стратегии применения этих правил. Следовательно. Эти операторы выполняют алгебраические преобразования.

APLAN - процедура 1 — линейная. Следовательно.

1. Преобразование процедурой 1 входа (24) — алгебраическое.
2. Вычислительная сложность APLAN - процедуры 1 тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры.

Оператор $solve$ преобразует систему линейных алгебраических уравнений в ее решение по эквиваленту метода Гаусса. Следовательно.

Сложность этого преобразования $Q(solve(S)) = O(n^3)$.

Сложность преобразования APLAN - операторами процедуры 1 оценена при их построении. С ростом параметра n эта сложность растет как полином

$$\begin{aligned}
Q(main_pol(n)) &= O(n) \quad , \\
Q(sub_du(Dy, main_pol(n))) &= O(n) \quad , \\
Q(ein_pol(Dn)) &= O(n^2) \quad , \\
Q(Enl(n, m-p, k)) &= O(n^2) \quad , \\
Q(subs(x = z, E_m)) &= O(n^2) \quad , \\
Q(pol_equ(Dn, m)) &= O(n^3) \quad , \\
Q(init_sys(y_n, InitPoint, init_cond)) &= O(n) \quad , \\
Q(ser(n, Coef)) &= O(n)
\end{aligned}$$

или не зависит от параметра n .

Следовательно. Сумма приведенных выше оценок вычислительной сложности преобразования операторами APLAN - процедуры 1 тождественна $O(n^3)$.

18. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1*

$$(\ \texttt{LDUMK}\ ,\ \texttt{init_cond}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ )$$

— APLAN - эквивалент для входа алгоритма 1

$$(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G=0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

и имеет:

LDUMK — *APLAN - эквивалент для ЛДУМК (3) порядка* k,

init_cond , InitPoint — *APLAN - эквивалент для начальных условий (4),*

— *рациональные константы,*

— $n=k+p$, *где* $p\in N$.

Тогда справедливо тождество

$$procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK}\ ,\ \texttt{init_cond}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ )\ =$$

$$algorithm_D_1(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G=0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

Вход (24) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент для входа (16)

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \, , \ init_cond(y, \ d) \, , \ [a, b] \, , \ n \ )$$

алгоритма 1. Следовательно. APLAN - процедура 1 преобразует вход (24)

$$procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n} \ )$$

в APLAN - эквивалент для полинома (16)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \, , \ init_cond(y, \ d) \, , \ [a, b] \, , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

19. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1*

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 , \ init_cond(y, \ d) , \ [a, b] , \ n)$$

имеет:

— ЛДУМК (3) порядка k ,

— начальные условия (4),

— $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда:

1. Преобразование (16)

$$y_n = algorithm_D_1(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 , \ init_cond(y, \ d) , \ [a, b] , \ n)$$

алгебраическое.

2. С ростом n *сложность преобразования (16) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1 (16)*

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

имеет:

— *ЛДУМК (3) порядка* k,

— *начальные условия (4),*

— *рациональные константы,*

— $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует вход алгоритма 1 (его эквивалент) в полином (16) (его эквивалент)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

20. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 3. *Пусть вход метода 1 тождественен входу алгоритма 1*

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 , \ init_cond(y, \ d) , \ [a, b] , \ n)$$

и имеет ЛДУМК (3), начальные условия (4) и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда алгебраический полином (5)

$$y_n = method_D_1(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 , \ init_cond(y, \ d) , \ [a, b] , \ n)$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (16)

$$y_n = algorithm_D_1(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 , \ init_cond(y, \ d) , \ [a, b] , \ n)$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. По определению метода 1 и алгоритма 1.

1. Тождественны аппроксимации (6) условий (4) по методу 1 и по алгоритму 1.
2. Полином (20) системы уравнений (21)

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a, b; \rho) = ?) ,$$

где полиномы (8), (9) имеют символьные коэффицменты

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n \ , \ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom \, ,$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?) = \tau_1 \cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z) \, , \ \{\tau_i\}_{i=1}^{m-p} \in Atom \, ,$$

тождественен левой части уравнения (7)

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G \ + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?) \, .$$

Этот многочлен имеет порядок m (10). Следовательно.

1. Уравнение (7) эквивалентно системе уравнений (21) $S =$

$$\{ \ t_i(\ A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?) \ ) \ \}_{i=0}^{m} \, .$$

2. Тождественны:

— решение системы уравнений (7), (6):

— полином y_n (5) (коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$ этого полинома) и

— коэффициенты $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$ полинома $E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?$ (9) и

— решение $Coef$ (22) системы уравнений (21), (6):

— коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$ полинома y_n (16) и

— коэффициенты $\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$ полинома $E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a, b; \rho) = ?$ (9).

21. Вариант 1 a- метода [3] для решения ЛИУМК (12)

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,, \qquad \text{где} \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$g = G + D[P_{k-1}]\,, \quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

(преобразования задачи Коши (3), (4)) имеет аппроксимирующее уравнение

$$u_p = a{-}method_1(\, A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) =$$

$$solve(\, A \cdot (u_p \in P_p = ?)\ + D[V^k[(u_p \in P_p = ?)]] + g +$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)\,. \tag{40}$$

Неизвестные уравнения (40) — коэффициенты полиномов (9)

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = \tau_1 \cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}\} \in Atom$$

и

$$(u_p \in P_p = ?) = c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p\ ,\ \{c_0, \ldots, c_p\} \in Atom\ . \tag{41}$$

Параметр m полинома (9) определяют полином (8) и тождества (10)

$$m = \deg(A(x) \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G(x)\ ), \quad \text{где} \quad n = p + k\,,$$

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0, \ldots, c_n\} = ?\,.$$

Лемма 4. *Пусть вход метода 1*

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )$$

имеет ЛДУМК (3), начальные условия (4) и $n = p + k$ *, где* $p \in N$ *.*

Тогда алгебраический полином (5)

$$y_n = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (40)

$$u_p = a{-}method_1(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a, b]\,,\ p = n - k\ )$$

и для полиномов (5) и (40) справедливо тождество

$$y_n = V^k[u_p] + P_{k-1}\ . \tag{42}$$

Доказательство. Если полином (8)

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n \ , \ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom \, , \ \{c_0, \ldots, c_n\} = ?$$

(полином имеет символьные коэффициенты) удовлетворяет условия (4)

$$init_cond(y_n \in P_n = ? \, , \, d) \ =$$

$$\{ \ (y_n \in P_n = ?)|_{x=d} = Y_0 \, , \ \ldots \, , \ (y_n \in P_n = ?)^{(k-1)}|_{x=d} = Y_{k-1} \ \} \ ) \ ,$$

то он тождественен результату преобразования (42) $V^k[u] + P_{k-1}$ полинома (41)

$$(u_p \in P_p = ?) = c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p \ , \ \{c_0, \ldots, c_p\} \in Atom \ , \ \ \{c_0, \ldots, c_p\} = ?$$

(полином имеет символьные коэффициенты). Т. е. справедливо тождество

$$(\ y_n \in P_n = ? \ , \ init_cond(y_n \in P_n = ? \, , \, d) \ ) = V^k[u_p \in P_p = ? \ ] + P_{k-1} \ . \qquad (43)$$

Выполнив подстановку $(\, y_n \in P_n = ? \,) = V^k[u_p \in P_p = ?] + P_{k-1}$ в уравнение (5)

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a, b; \rho) = ?) = 0$$

мы получаем уравнение (40).

22. Вариант 2 a- метода [3] для решения ЛИУМК (12)

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,, \qquad \text{где} \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$g = G + D[P_{k-1}]\,, \quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

(преобразования задачи Коши (3), (4)) имеет аппроксимирующее уравнение

$$u_p = a{-}method_2(\, A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) =$$

$$solve(\, A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ + D[V^k[(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)]] + g +$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)\,. \tag{44}$$

Неизвестные уравнения (44) — коэффициенты полиномов (14) и (9)

$$(\, u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,) = a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\,,\ \{a_0,\ldots,a_p\} \in Atom\,,$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = \tau_1 \cdot T_{p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} \in Atom\,.$$

Параметр m полинома (9) определяют полином (8) и тождества (10)

$$m = \deg(A(x) \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G(x)\ )\ ,\quad n = p + k\,.$$

Лемма 5. *Пусть вход метода (40) тождествен входу метода (44)*

$$(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,)\,,$$

имеет ЛИУМК (12) и $p \in N$. *Тогда алгебраический полином (40)*

$$u_p = a{-}method_1(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) =$$

$$solve(\ A \cdot (u_p \in P_p = ?) + D[V^k[(u_p \in P_p = ?)]] + g + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (44) $u_p =$

$$a{-}method_2(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) = solve(\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) +$$

$$D[V^k[(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)]] + g + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. Если полином вида (14)

$$u_p = a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\ \ (\,u_p \in L_2^p(a,b;\rho)\,)$$

является решением уравнения (44), то результат преобразования этого полинома в полином вида (2) порядка p (подстановка $z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1$, раскрывание скобок, приведение подобных и упорядочивание)

$$u_p = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_p \cdot x^p \quad (\ u_p \in P_p\ )$$

тождественен этому полиному и является решением уравнения (40).

Это преобразование имеет обратное
(подстановка $x = a + (z+1) \cdot (b-a)/2$ и алгоритм Кленшоу [5] преобразования коэффициентов полинома вида (2) в коэффициенты ряда Чебышева).

Следовательно. Если решением уравнения (40) является полином

$$u_p = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_p \cdot x^p \quad (\ u_p \in P_p\ )\,,$$

то результат (обратного) преобразования этого полинома в полином вида (14)

$$u_p = a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\ \ (\,u_p \in L_2^p(a,b;\rho)\,)$$

тождественен этому полиному и является решением уравнения (44).

23. Вариант 2 a - метода [3] и проекционный метод 1

Лемма 6. *Пусть вход проекционного метода 1 (13)*

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0 \,,\ [a,b] \,,\ p)$$

тождествен входу варианта 2 a - метода (44) и имеет $p \in N$ *и ЛИУМК (12)*

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0) = subs(y = V^k[u] + P_{k-1} \,,\ (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0)) \,.$$

Тогда алгебраический полином (44)

$$u_p = a{-}method_2(A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0 \,,\ [a,b] \,,\ p) =$$

$$solve(A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)]] + g +$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0) \,,$$

где $\quad m = \deg(A(x) \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G(x)) \,, \quad n = p + k \,,$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (13)

$$u_p = solve(S_p[A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g] = 0)$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. Согласно определению ЛИУМК (12). Слагаемое

$$A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)]] + g$$

уравнения (44) имеет вид

$$A \cdot (V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?] + P_{p-1})^{(k)} + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?] + P_{p-1}] + G\,.$$

Многочлен этого слагаемого

$$V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?] + P_{p-1} = a_0 \cdot V^k[T_0(z)] + \cdots + a_p \cdot V^k[T_p(z)] + P_{p-1}\,,$$

где $\{a_0, \ldots, a_p\} \in Atom$, является частным случаем многочлена (8)

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n \ , \ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom \ , \quad \text{где} \ \ n = p + k\,.$$

Этот частный случай многочлена (8) удовлетворяет условия (4). Следовательно.

Это слагаемое уравнения (44) — многочлен и порядок этого многочлена

$$\deg(\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ) =$$

$$\deg(\ A \cdot (V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?] + P_{p-1})^{(k)} + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?] + P_{p-1}] + G\ )$$

не превышает параметр m (10) уравнения (44)

$$m = \deg(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G\ ) .$$

Следовательно. Левая часть уравнения (44) — многочлен порядка m (10).

Многочлен F_m порядка m тождественен нулю тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье - Чебышева $a_i(F_m, [a,b])$ порядка $i = 0, \ldots, m$ этого многочлена на отрезке $[a,b]$ тождественны нулю.

Следовательно. Уравнение (44) эквивалентно системе уравнений

$$\{\ a_i(\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g +$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ ,\ [a,b]\ ) = 0\ \}_{i=0}^{m} . \qquad (45)$$

Неизвестные системы уравнений (45):

$a_0,\ a_1, \ldots, a_p$ — коэффициенты полинома $u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?$ (14) и

$\tau_1, \ldots, \tau_{m-p}$ — коэффициенты полинома $(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)$ (9).

Функционал $a_i(P,\ [a,b])$ — линейный и справедливо тождество

$$a_i(c_0 \cdot T_0(z(x)) + \cdots + c_i \cdot T_i(z(x)) + \cdots\ ,\ [a,b]) = c_i\ .$$

Следовательно.

1. Справедливы тождества

$$a_i(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?\ ,\ [a,b]) \ = \ 0 \quad , \qquad i = 0,\dots,p\ ,$$
$$a_i(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?\ ,\ [a,b]) \ = \ \tau_{i-p} \quad , \qquad i = p+1,\dots,m\ .$$

2. Первые $p+1$ уравнения системы (45) имеют вид

$$\{\ a_i(\ A\cdot(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ,\ [a,b]\ ) = 0\ \}_{i=0}^{p}\ . \quad (46)$$

3. Система уравнений (46) эквивалентна уравнению преобразования (13)

$$u_p = solve(\ S_p[\ A\cdot(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )\ .$$

4. Решение системы уравнений (46) — коэффициенты многочлена u_p (13).

5. Результат подстановки многочлена u_p (13) в уравнения (45) с номером $i = p+1,\dots,m$ (вместо $u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?$) — система уравнений

$$\tau_{i-p} = -a_i(A\cdot u_p + D[V^k[u_p]] + g\ ,\ [a,b])\ , \qquad i = p+1,\dots,m\ , \qquad (47)$$

где $u_p = solve(\ S_p[\ A\cdot(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )\ .$

Уравнения (47) — тождества и определяют коэффициенты $\tau_1,\dots,\tau_{m-p}$.

24. Эквивалентность метода 1 и проекционного метода 1

Теорема 5. *Метод 1 преобразования (5) в полином (2)*

$$y_n = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

задачи Коши для ЛДУМК (3), (4) $\quad A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,$

$$init_cond(y,d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,,\ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \}$$

есть алгебраический эквивалент для преобразования этой задачи в ЛИУМК

$$A\cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\qquad \text{где}\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$g = G + D[P_{k-1}]\,,\quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,,$$

(12) и преобразования этого ЛИУМК по проекционному методу 1 в полином (13)

$$u_p = solve(\ S_p[\ A\cdot(u_p\in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p\in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )\,.$$

Справедливо следующее утверждение.

Пусть вход метода 1

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет ЛДУМК (3), условия (4) и $n = p + k$ *, где* $p \in N$. *Тогда:*

1. Преобразование по методу 1 этого входа в полином (5)

$$y_n = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

— алгебраическое.

2. Полином y_n *(5)* (результат преобразования по методу 1 этого входа)

$$y_n = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (13)

$$u_p = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g \ ] = 0 \ )$$

(результат преобразования по проекционному методу 1 ЛИУМК (12)
— преобразования ЛДУМК (3) этого входа)

и для этих полиномов справедливо тождество (42)

$$y_n = V^k[u_p] + P_{k-1} \, .$$

Доказательство. Согласно лемме 3. Тождественны преобразования (5) и (16)

$$y_n = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =$$

$$y_n = algorithm_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

Согласно теореме 3. Преобразование (16) — алгебраическое.
Следовательно. Преобразование (5) — алгебраическое.

Согласно лемме 4. Алгебраический полином (5)

$$y_n = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n = p + k\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует алгебраический полином (40)

$$u_p = a{-}method_1(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) =$$

$$solve(\ A\cdot(u_p \in P_p = ?) + D[V^k[(u_p \in P_p = ?)]] + g + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)\,.$$

Полином (40) — результат решения по варианту 1 a - метода [3] ЛИУМК (12)

$$(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,) = subs(\ y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,)\,)\,,$$

где $u = y^{(k)}\,, \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g = G + D[P_{k-1}]\,,$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Для полиномов y_n (5) и u_p (40) справедливо тождество (42)

$$y_n = D[V^k[u_p]] + P_{k-1}\ .$$

Согласно лемме 5. Алгебраический полином u_p (40) существует тогда и только тогда, когда существует полином (44) $u_p =$

$$a\text{–}method_2(\,A\cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\,) = solve(\,A\cdot(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) +$$

$$D[V^k[(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)]] + g + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Согласно лемме 6. Алгебраический полином u_p (44) существует тогда и только тогда, когда существует полином (13)

$$u_p = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )$$

и эти полиномы тождественны.

25. Класс $D_{1,X}$ задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к проекционному методу 1

$$u_p = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )$$

(13) решения ЛИУМК (12) (преобразования задачи Коши для ЛДУМК (3), (4))

$$(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\ ) = subs(\ y = D[V^k[u]] + P_{k-1}\ ,\ (\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ )\ ),$$

$$\text{где} \qquad u = y^{(k)}\ , \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\ , \quad g = G + D[P_{k-1}]\ ,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\ .$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_p

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho)\ \to\ L_2^p(a,b;\rho)$$

(15) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84). Доказывают следующее утверждение.

Вывод 10. *Проекционный метод 1 (13) решения ЛИУМК (12)*

$$u_p = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ ),$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho),\ C_{[a,b]},\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *определяют класс* $D_{1,X}$ *задач Коши для ЛДУМК (3), (4) (типа* D_1 *)*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|u - u_p\|_X\ /\ \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|u(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X \tag{48}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши для ЛДУМК (3), (4) класса $D_{1,X}$ *в производную порядка* k *решения этой задачи*

$$u = y^{(k)} = (solve(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши для ЛДУМК в ЛИУМК (12)

$$(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\ ) = subs(\ y = V^k[u] + P_{k-1}\ ,\ (\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ )\ )$$

и решением этого ЛИУМК по проекционному методу 1 (13).
Классы $D_{1,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{1,C_{[a,b]}}$ *задач Коши для ЛДУМК (3), (4) представительны.*

26. Эффективность метода 1

Следствие 1. *Пусть вход метода 1*

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет ЛДУМК (3), начальные условия (4) и $n = p + k$ *, где* $p \in N$ *,*
и пусть пространство $X = C_{[a,b]}, \ L_2(a,b;\rho), \ \ldots$.

Тогда в пространстве X *коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X \qquad (49)$$

аппроксимации преобразования задачи Коши для ЛДУМК (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи*

$$y^{(k)} = (\ solve(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ y =? \ ) \ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 и дифференцированием

$$y_n^{(k)} = (\ method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \ init_cond(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) \ )^{(k)}$$

тождественен коэффициенту оптимальности (48)

$$\|u - u_p\|_X \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|u(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X$$

аппроксимации преобразования ЛИУМК (12)

$$(\, A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,) = subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,)\,)$$

— результата преобразования задачи Коши (3), (4), где

$$u = y^{(k)}\,, \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g = G + D[P_{k-1}]\,,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

в решение этого ЛИУМК

$$u = (\ solve(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\,,\ u = ?\ )\ )$$

преобразованием ЛИУМК (12) по проекционному методу 1 (13)

$$u_p = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g\ ] = 0\ )\,.$$

Доказательство. Начальные условия (4) определяют подстановку

$$y = V^k[u] + P_{k-1}\ , \quad \text{где} \qquad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Эта подстановка преобразует ЛДУМК (3) в ЛИУМК (12)

$$(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g = 0\ )\ =\ subs(\ y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ )\ )\,.$$

ЛИУМК (12) имеет решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $y(x)$ задача Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$y(x) = V^k[u(x)] + P_{k-1}\,,\ \ u(x) = y^{(k)}(x)\,.$$

Согласно теореме 5. Для полиномов y_n (5) и u_p (13) справедливо тождество

$$y_n = V^k[u_p] + P_{p-1}$$

(42). Следовательно. Справедливо тождество $y_n^{(k)} = u_p\,.$

Следовательно. Тождественны коэффициенты оптимальности (48) и (49).

27. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 10 доказывают следующее утверждение.

Вывод 11. *Пусть пространство* $X = L_2(a, b; \rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *и задача Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_1 *принадлежит к классу* $D_{1,X}$.

Тогда в пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности (49)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \ / \ \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X$$

аппроксимации преобразования этой задачи Коши для ЛДУМК (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи*

$$y^{(k)} = (\ solve(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ y =?\ )\ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 и дифференцированием

$$y_n^{(k)} = (\ method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )\ )^{(k)}.$$

Класс $D_{1,X}$ *определяет проекционный метод 1 (13).*

Классы $D_{1,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{1,C_{[a,b]}}$ *представительны.*

28. Метод 1 и сеточные методы [6]

$$y_h = s_method(\ y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ q\ ) = \{y_i\}_{i=0}^{q}\,. \quad (50)$$

По сеточным методам [6] на отрезке $[a,b] = [d,b]$ решают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений разрешенных относительно старшей производной, в частности задачу Коши для ЛДУМК

$$y^{(k)} + D[y] + G = 0\ , \quad init_cond(y,d)\ .$$

Пример такого уравнения — ЛДУМК (27).

Результат решения задачи Коши по сеточному методу [6] — сеточная функция y_h , $h = (b-a)/q$ (50) — аппроксимирует значения функции — решения задачи

$$y(x) = solve(y^{(k)} + D[y] + G = 0\ , \quad init_cond(y,d),\ y = ?\ )$$

в узлах сетки $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ \ldots,\ x_q = b\,,$ — $y_h(x_i) \approx y(x_i)\ .$

Если функция $y(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную порядка $r \geq p$ — $y(x) \in C^r_{[a,b]}$ и число узлов q сетки метода (50) растет, то погрешность этой аппроксимации убывает [6]

$$\|y(x) - s_method(\ y^{(k)} + D[y] + G = 0\ , \quad init_cond(y,d)\ ,\ q\ )\|_{C_q} =$$

$$\max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(h^p)\,, \quad \text{где} \quad p \le 6\,.$$

Если функция $y = y(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную порядка r , то в пространстве $C_{[a,b]}$ для величины наилучшего приближения этой функции алгебраическими полиномами порядка n справедливо тождество

$$y \in C^r_{[a,b]} \;\to\; E_{n,C_{[a,b]}}[y] = \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}} = O(n^{-r}) \;\; [3].$$

Из этих тождеств и вывода 11 следует утверждение.

Вывод 12. *Пусть задача Коши для ЛДУМК*

$$y^{(k)} + D[y] + G = 0\,, \quad init_cond(y,d)$$

принадлежит к классу $D_{1,C_{[a,b]}}$ *и решение* $y(x)$ *этой задачи имеет на отрезке* $[a,b] = [d,b]$ *производную порядка* $7+k$.

Тогда для погрешности решения этой задачи Коши по методу 1 (5) и по классическим [6] сеточным методам (50) справедливо тождество

$$\|(y(x) - method_D_1(\, y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\, init_cond(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,))^{(k)}\|_{C_{[a,b]}} =$$

$$o(\|y(x) - s_method(\, y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\, init_cond(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\|_{C_n})\,.$$

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (15) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 12.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают задачу Коши для ЛДУМК (3), (4).*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0 \ , \qquad init_cond(y,d) \ .$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования решения задачи Коши для ЛДУМК (3), (4) без особых точек на отрезке аппроксимации.

Дополнение

Метод 1'. Вариант τ - метода Ланцоша [2] — модификация метода 1. Модификация уравнения (7) имеет вид

$$y_n = method_D_1'(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =$$

$$solve(\ \ init_cond(y_n \in P_n = ?\ ,\ d)\ \ , A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)}\ +$$

$$D[y_n \in P_n = ?] + G + \tau_1 \cdot R_{n+1}(z) + \cdots + \tau_{m-n} \cdot R_m(z) = 0\,,\ y_n \in P_n = ?\ )$$

имеет базис пространства Гильберта $H_{[a,b]}$ — полиномы $R_0(z)\,,\ R_1(z)\,,\ldots$.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1. Многочлен (19) имеет вид

$$(\ E_{m,n} \in H^{m\backslash n}_{[-1,1]} = ?\ ) = \tau_1 \cdot R_{n+1}(x) + \cdots + \tau_{m-n} \cdot R_m(x)\ ,$$

где коэффициенты $\tau_1, \ldots, \tau_{m-n} \in Atom$ (символьные).

APLAN - процедура 1'. Реализация алгоритма 1' — модификация APLAN - процедуры 1. Оператор `cheb` (вычисляет многочлен Чебышева (11)) заменен на оператор `basis`. Этот оператор вычисляет полиномы $R_0(x)$, $R_1(x)$,... базиса пространства $H_{[-1,1]}$.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* — М.: Мир. — 1969. — 368 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 4

Программа для решения систем задач Коши для ЛДУМК типа D_2

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (1)$$

$$[a,b]\ ,\ n\ )\ =\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \qquad (2)$$

Эта процедура преобразует систему задач Коши для ЛДУМК типа D_2 *— линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами*

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,, \qquad (3)$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (4)$$

где линейные дифференциальные операторы и начальные условия имеют вид

$$A_i \cdot y^{(k)} + D_i[y] = A_i \cdot y^{(k)} + B_i(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_i(x) \cdot y(x)\,,$$

$$init_cond_i(y,d)\ =\ \{\ y(d) = Y_{i,0}\,,\ y'(d) = Y_{i,1}\,,\ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{i,k-1}\ \}\,,\quad i = 1,2\,.$$

2. Метод 1 выполнения преобразования (1), (2)

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\,) \quad (5)$$
$$= (\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\ )\,.$$

Метод 1 — распространение на системы задач Коши для ЛДУМК типа D_2 (3), (4) алгоритмизации τ - метода Ланцоша [2] лекции 3.

Эта алгоритмизация основана на a - методе [3] и имеет уравнение (3.5)

$$H_n = solve(\ \ init_cond_2(y_n \in P_n = ?\,,\ d)\ \ ,$$
$$A_2 \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D_2[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )\,.$$

Неизвестные уравнений (3.5) и (5) — (символьные) коэффициенты полиномов

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} = ?\,,$$
$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1 \cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} = ?\,.$$

3. Интегральный эквивалент задаче Коши (3), (4)

Начальные условия системы задач Коши (3), (4) определяют подстановку

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \quad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad \text{где} \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2\,.$$

Эта подстановка преобразует систему ЛДУМК (3), (4) в систему линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$H^{(k)} = solve(\ A_2\cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$
$$y^{(k)} = solve(\,A_1\cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + G_1 + D_1[P_{1,k-1}] + \tag{6}$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\ u = ?\,)\,.$$

Система ЛИУМК Вольтерра (6) имеет решение $H^{(k)}(x)\,,\ y^{(k)}(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $H(x)\,,\ y(x)$ система задач Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \quad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$y_n^{(k)} = G_method_I_2(\ H^{(k)} = solve(\ A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$
$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 + V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1} = 0\,,\ u = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =$$
$$(\ H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,, \quad (7)$$
$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\ )\,. \quad (8)$$

Неизвестные уравнений (7), (8) — коэффициенты $a_0,\ a_1, \ldots, a_p$ полинома

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

где $\quad T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ \ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,\ \ p = n - k\,.$

Оператор S_p уравнений (7), (8) преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,. \quad (9)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачи Коши для ЛДУМК (4) и системы задач Коши для ЛДУМК типа D_2 (3), (4) применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши для ЛДУМК в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (7) в пространстве $C_{[a,b]}, \ldots$ определяют [4] (глава 3) аппроксимационные характеристики оператора S_p (9).

$$A_2 = 1 \ \rightarrow\ \|H^{(k)} - H_n^{(k)}\|_X = (1+o(1)) \cdot \|H^{(k)} - S_p[H^{(k)}]\|_X\,,\ X = C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,.$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгебраический алгоритм 1 метода 1

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ , \quad (10)$$

где $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ — оператор уравнения (3).
Этот оператор и функция H определяют уравнение (3) типа D_2.

1. По алгоритму 3.1 преобразовать задачу Коши для ЛДУМК входа (10) в полином

$$H_n = algorithm_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \quad (11)$$

2. Преобразовать оператор $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ входа (10) и полином H_n (11) в ЛДУМК

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ . \quad (12)$$

3. По алгоритму 3.1 преобразовать ЛДУМК (12) и условия $init_cond_1(y,d)$ в полином (10)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

7. Вход APLAN - процедуры 1

$$\begin{aligned} &(\ \texttt{D_1}\ ,\ \texttt{init_cond_1}\ ,\\ &\texttt{LDUMK_2}\ ,\ \texttt{init_cond_2}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ ) \qquad (13)\\ &\sim \quad (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\\ &A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ). \end{aligned}$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

`InitPoint := d` $\sim$ d . Начальная точка задачи Коши.

`interval := (a, b)` $\sim$ $[a,b]$. Отрезок аппроксимации.

`n` $\sim$ $n \in N$. Порядок полинома y_n (10).

Оператор (3) $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 =$

$$A_1(x) \cdot y^{(k)}(x) + B_1(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_1(x) \cdot y(x) + G_1(x)$$

имеет APLAN - эквивалент — оператор `D_1 :=`

`A_1 * dif(y , k) + B_1 * dif(y , k-1) + ⋯ + C_1 * y + G_1 ; .` (14)

Начальные условия (3)

$$init_cond_1(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_{1,0}\,,\; y'(d) = Y_{1,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{1,k-1}\;\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

`init_cond_1 :=`

`( y =` $Y_{1,0}$, `dif(y , 1) =` $Y_{1,1}$, `... , dif(y , k-1) =` $Y_{1,k-1}$ `) ; .`

ЛДУМК (4)

$$(\; A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\;) \;=$$

$$(\, A_2(x) \cdot y^{(k)}(x) + B_2(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_2(x) \cdot y(x) + G_2(x) = 0\,)$$

имеет APLAN - эквивалент

`LDUMK_2 := ( A_2 * dif(y , k) + B_2 * dif(y , k-1) + ⋯ +`

```
C_2 * y + G_2 = 0 ) ; .
```
(15)

Начальные условия (4)

$$init_cond_2(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_{2,0}\,,\; y'(d) = Y_{2,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{2,k-1}\;\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

```
init_cond_2 :=
```

(y = $Y_{2,0}$, dif(y , 1) = $Y_{2,1}$,... , dif(y , k-1) = $Y_{2,k-1}$) ; .

Составляющие оператора (14), уравнения (15) и эквивалента условий.

Атомы `y , x`

— APLAN - эквивалент искомой функции y и независимого аргумента x .

```
NAME  A_1 , B_1 ,..., C_1 , G_1 , A_2 , B_2 ,..., C_2 , G_2
```

— термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^ ,`

— APLAN - эквивалент полиномов

$A_1(x)$, $B_1(x)$,..., $C_1(x)$, $G_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$,..., $C_2(x)$, $G_2(x)$.

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_2$

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

LDUMK_1 := ( D_1 + H_n = 0 ) ;
y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

Преобразования процедуры 1 — APLAN - эквивалент преобразований.

$$H_n = procedure_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ) =$$

$$subs(\ H = H_n,\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ )\ ).$$

$$y_n = procedure_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

Замечание 1. APLAN - процедура $procedure_D_1$ построена в лекции 3.

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y'' - y' - y + H = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,, \tag{16}$$

$$H(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,,\ y = ?\ ) \tag{17}$$

на отрезке $[-1, 1]$.

```
D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 * y ;
init_cond_1 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = 1 ) ;
LDUMK_2 := ( dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) = 0 );
init_cond_2 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = 1 ) ;
interval := (-1,1) ;
```

(18)

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (18)

```
n := 3 ;
H_n = 1 + x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(2,9) * x ^ 3 ;
LDUMK_1 = ( dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 * y +
1 + x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(2,9) * x ^ 3 = 0 ) ;
y_n = 1 + x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(2,9) * x ^ 3 ;
```

Результаты преобразования входа (18) в классическом виде.

$$H_n = 1 + x + 2/3 \cdot x^2 + 2/9 \cdot x^3 \ .$$

$$(\ y'' - y' - y + H_n = 0 \ ) \ =$$

$$y'' - y' - y + 1 + x + 2/3 \cdot x^2 + 2/9 \cdot x^3 = 0 \ .$$

$$y_n = 1 + x + 2/3 \cdot x^2 + 2/9 \cdot x^3 \ .$$

11. Наилучшее приближение решения модельной задачи

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - y + \exp(x) = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ . \quad (19)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y(x) = \exp(x)$ (решения задачи Коши (16), (17)) на отрезке $[-1, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_i(\exp(x), [-1, 1])\}_{i=1}^{15} = \{1.13,\ 0.27,\ 0.044,\ 0.0054,\ 0.00054,\ 4.5 \cdot 10^{-5},\ 3.2 \cdot 10^{-6},$$

$$2 \cdot 10^{-7},\ 1.1 \cdot 10^{-8},\ 5.5 \cdot 10^{-10},\ 2.5 \cdot 10^{-11},\ 10^{-12},\ 4 \cdot 10^{-14},\ 1.4 \cdot 10^{-15},\ 10^{-16}\}\ . \quad (20)$$

Коэффициенты (20) регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$a_n(\exp(x), [-1, 1]) = (1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n} \cdot t_n(\ \exp(x)\ ) = (1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n}/n!\ ,$$
$$a_{n+1}(\exp(x), [-1, 1])/a_n(\exp(x), [-1, 1]) = \beta_n =$$
$$(1 + \gamma_{n+1})/(1 + \gamma_n)/(2 \cdot (n + 1)) \approx 1/(n + 1)/2\ ,\ \text{где}\ \{\ \beta_n\ ,\ n = 1, \ldots, 13\ \} =$$
$$\{\ 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\ \}\ .$$

Функция $\exp(x)$ — целая. Норма многочлена Чебышева тождественна 1.

$$\|\cos(i \cdot \arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i \cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств и тождества (20) следуют утверждения.

Вывод 1. *Величина наилучшего приближения функции* $y(x) = \exp(x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\, E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,)$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\, \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}}\,) \,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; (1+\delta_n) \cdot a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;, \quad (21)$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1) \;, \qquad \{\, \beta_n \;,\; n = 1,\ldots,13 \,\} =$

$\{\, 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032 \,\}$.

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \; = \; C_n$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\; y'' - y' - y + H = 0 \; , \quad y(0) = 1 \; , \quad y'(0) = 1 \; ,$$

$$H = \exp(x) = solve(\; y'' - y' = 0 \; , \quad y(0) = 1 \; , \quad y'(0) = 1 \;) \;)$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_2(\; \texttt{D_1 := dif(y , 2) +} \; \ldots \; (18) \;) \tag{22}$$

имеет главную часть $\Theta(\; C_n \;)$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \; = \; \Theta(\; C_n \;) \; .$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \; =$$

$$(1 + \delta_n) \; \cdot \; \| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \; . \tag{23}$$

Вывод 3. *Величина наилучшего приближения функции* $y(x) = \exp(x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C^k_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^k_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)] =$$

$$\max\{\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,,\; E_{n-1,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))']\,,\dots,\; E_{n-k,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))^{(k)}]\}$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)] \;=\; E_{n-k,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))^{(k)}]\;)$ — *коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1-k$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^k_{[-1,1]}}\;).$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^k 1_{[-1,1]}} \;=\; (1+\delta_{n-k}) \cdot a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1])\;,$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1)\;, \qquad \{\; \beta_n\;,\; n = 1,\dots,13\;\} =$

$\{\; 0.24,\; 0.16,\; 0.12,\; 0.1,\; 0.08,\; 0.07,\; 0.06,\; 0.055,\; 0.05,\; 0.045,\; 0.042,\; 0.038,\; 0.032\;\}$.

Вывод 4. *В пространстве* $C^k_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^k_{[-1,1]}} \; = \; C^k_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\; y'' - y' - y + H = 0 \; , \quad y(0) = 1 \; , \quad y'(0) = 1 \;) \, ,$$

$$H = \exp(x) = solve(\; y'' - y' = 0 \; , \quad y(0) = 1 \; , \quad y'(0) = 1 \;)$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (22) процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_2(\;\; \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +} \;\; \ldots \;\; (18) \;)$$

имеет главную часть $\Theta(\; C^k_n \;)$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \; = \; \Theta(\; C^k_n \;) \; .$$

Справедливо тождество $\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \; / \; a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \; =$

$$(1 + \delta_{n-k}) \; \cdot \; \| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^k_{[-1,1]}} \, .$$

12. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[-1,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - y + \exp(x) = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\| \exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{13} = \{\ 0.72,\ 0.22,\ 0.17,\ 0.02,\ 0.0011,\ 0.00018,\ 3.6 \cdot 10^{-6},$$

$$7.7 \cdot 10^{-7},\ 9.1 \cdot 10^{-9},\ 2.1 \cdot 10^{-9},\ 1.5 \cdot 10^{-11},\ 3.9 \cdot 10^{-12},\ 6.3 \cdot 10^{-14}\ \}\,. \qquad (24)$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 2 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 5. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - y + H = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$
$$H = \exp(x) = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = A_n\,, \qquad \text{где}$$
$$\{\ A_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^{6} \ = \ \{\ 5,\ 37,\ 56,\ 70,\ 84,\ 100\ \}\ ,$$
$$\{\ A_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^{6} \ = \ \{\ 3,\ 31,\ 24,\ 18,\ 16,\ 15\ \}\ .$$

В пространстве $C_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y' = solve(\ y'' - y' - y + \exp(x) = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )' = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y'_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )'$$

принимает следующие значения

$$\{\| \exp(x) - y'_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{13} = \{1.7,\ 0.72,\ 0.28,\ 0.044,\ 0.0018,\ 0.00029,$$

$$9.1 \cdot 10^{-6},\ 1.3 \cdot 10^{-6},\ 2.8 \cdot 10^{-8},\ 3.5 \cdot 10^{-9},\ 5.8 \cdot 10^{-11},\ 6.4 \cdot 10^{-12},\ 8.6 \cdot 10^{-14}\ \}$$

и

$$\{\| \exp(x) - y'_n\|_{C_{[-1,1]}} > \| \exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{13}\,.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождеств (20) и (24) следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ a_n(\exp(x), [-1,1]) \quad = \quad \Theta(\ C^1_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^1_{[-1,1]}} \quad = \quad C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - y + H = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$
$$H = \exp(x) = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = A_n\,, \qquad \text{где}$$

$$\{\ A_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^{6} \quad = \quad \{\ 1.5,\ 6,\ 3,\ 2.8,\ 2.6,\ 2.3\ \}\ ,$$
$$\{\ A_{2\cdot i}\ \}_{i=0}^{6} \quad = \quad \{\ 3,\ 8,\ 6.4,\ 6.5,\ 6.3,\ 6.4\ \}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^2_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - y + \exp(x) = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\ \|\exp(x) - y_n\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|\exp(x)'' - y_n''\|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=1}^{12} = \{2.7,\ 2,\ 0.97,\ 0.07,\ 0.0064,$$

$$8 \cdot 10^{-4},\ 4.7 \cdot 10^{-5},\ 4.3 \cdot 10^{-6},\ 2.1 \cdot 10^{-7},\ 1.4 \cdot 10^{-8},\ 5.6 \cdot 10^{-10},\ 2.8 \cdot 10^{-11}\ \}.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 7. *В пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^2_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C^2_{[-1,1]}} \ = \ C^2_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - y + H = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} / a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) = 1 + \alpha_n\ ,$$

где $\{\alpha_n\}_{n=2}^{12} = \{\ 0.8,\ 2.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.04,\ 0.3,\ 0.03,\ 0.3,\ 0.02,\ 0.1\ \}$.

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}$ *второй производной решения задачи Коши (16), (17)*

$$y''(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - y + H = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

второй производной результата преобразования процедурой 1 входа (18)

$$y_n''(x) = (\ procedure_D_2(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) ...}\ (18)\ )''$$

(22) имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[-1,1]}$ *) приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* $n-2$

$$\Theta(\ \| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-2}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}}\,.$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-1}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ (1 + \delta_{n-2})\,.$$

Полиномы $y_n''\ ,\ n = 1, \dots, 12$ (22) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $\exp(x)$ в пространстве $C_{[-1,1]}$.

13. Сравнение процедуры 1 и интегрального метода [6]

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ \ u(0) = 1\,,\ \ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно.

Из этих тождеств и тождества (24) следует утверждение.

Вывод 9. *Погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ , \quad x \in [0,1]$$

по интегральному методу с формулой трапеций [6] (с. 48),
где число узлов $q = 10$ *и* $q = 40$ *,*

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

больше погрешности (24) решения системы задач Коши для ЛДУМК (16), (17) APLAN - процедурой 1, где параметр $n = 5$ *и* 6 *, соответственно.*

$$\|\exp(x) - y_5\|_{C_{[-1,1]}} = 0.0011\ ,$$

$$\|\exp(x) - y_6\|_{C_{[-1,1]}} = 1.8 \cdot 10^{-4}\ .$$

Из этих тождеств, тождества (24) и классических оценок погрешности метода механических квадратур с формулой трапеций [6] следует утверждение.

Вывод 10. *Если число узлов* q *интегрального метода с формулой трапеций [6] (с. 48) растет, то погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

по этому методу [6] (с. 48) убывает как полином.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |\exp(-2 \cdot i/q) - u_h(i/q)| = O(1/q^2)\ .$$

Если параметр n *входа (18) APLAN - процедуры — порядок полинома (22)*

$y_n = procedure_D_2($ (`D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +`, ..., n) (18))

растет, то погрешность (24) решения задачи Коши (16), (17) APLAN - процедурой 1 убывает более быстро, чем полином.

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} = o(p^n)\ , \qquad p \approx 0.1\ .$$

14. Сравнение APLAN - процедуры 1 и метода

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ]\,.$$

Согласно методу $P_q[u_h]$ задачу Коши $F[u] = 0$, в частности задачу Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

по интегральному методу [6] преобразуют в сеточную функцию

$$u_h \ = \ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ , \quad h = (b-a)/q\ ,$$

и интерполируют эту функцию алгебраическим полиномом порядка q .

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности метода $P_q[u_h]$ не меньше погрешности интегрального метода [6] (вычисления сеточного решения u_h).

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $u(x) = \exp(-2 \cdot x)$ — решения задачи Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

на отрезке $[0,1]$ принимают значения

$$\{a_i(u,[0,1])\}_{i=0}^{15} = \{1.86,\ -1.66,\ 0.4,\ -0.065,\ 0.008,\ -0.0008,$$

$$6.6\cdot 10^{-5},\ -4.7\cdot 10^{-6},\ 2.9\cdot 10^{-7},\ -1.6\cdot 10^{-8},\ 8\cdot 10^{-10},$$

$$-3.7\cdot 10^{-11},\ 1.5\cdot 10^{-12},\ -5.9\cdot 10^{-14},\ 2.1\cdot 10^{-15},\ -2.2\cdot 10^{-17}\ \}\ .$$

Эти коэффициенты регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$\{\ |a_{i+1}(u,[0,1])|\ /\ |a_i(u,[0,1])| = \gamma_i\ \}_{i=0}^{14} = \{\ 0.9,\ 0.25,\ 0.17,\ 0.13,$$

$$0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.04,\ 0.038,\ 0.03,\ 0.01\ \}\ .$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2\cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2\cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5\cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 11. *В пространстве* $C_{[0,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши

$$(\ F[u] = 0\ ) = (\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ )$$

в ее решение

$$u(x) = \exp(-2 \cdot x) = solve(\ (\ F[u] = 0\ )\ )$$

преобразованием этой задачи Коши в полином по методу $P_q[u_h]$

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [0,1]\,,\ q\ )\ ]$$

имеет главную часть $\Theta(\ C_n\ )$. *Эта главная часть тождественна отношению*

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| \ = \ \Theta(\ \|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)]\ )\ .$$

Справедливо тождество

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| = \|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \cdot (1 + o(1))\ .$$

В случае $q = 10$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{10}[u_{h=1/10}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,10} | \exp(-2 \cdot i/10) - u_{h=1/10}(i/10) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$0.007 \ \ / \ \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \ \approx \ 760\ 000\ 000 \, .$$

В случае $q = 40$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{40}[y_{h=1/40}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| / o(p^n) \ ,$$

где $p \leq 1/20$, *и, следовательно, она не меньше*

$$4.5 \cdot 10^{-4} \ \ / \ \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \cdot 20^{30} \ \ \approx \ \ 5 \cdot 10^{46} \ .$$

Из этих неравенств и вывода 5 следует утверждение.

Вывод 12. *Метод* $P_q[u_h]$ *преобразования задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

в алгебраический полином порядка q *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y] = 0\,, \quad solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ ) = y(x)\,, \quad x \in [a,b]\,, \quad y(x) \in X\,,$$

где пространство $X = C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots,$ *в алгебраический полином*

$$y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) \ = \ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,.$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности в пространстве X

$$\|y - y_n\|_X \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$ *аппроксимации*

преобразования (функции) $y(x) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )\,,\ x \in [a,b]$

преобразованием (полиномом) $y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$

15. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

Выход оператора `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n = 0 ) ;`
— APLAN - эквивалент вида (14) ЛДУМК (12)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,.$$

Выход оператора

```
y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

16. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

```
D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n
```

имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда.

1. APLAN - процедура 1 — алгебраическое преобразование входа (13).

2. Для сложности преобразования APLAN - процедурой 1 входа (13) справедливо тождество

$$Q(\ \texttt{procedure_D_2(D_1 , init_cond_1 ,}$$

$$\texttt{LDUMK_2 , init_cond_2 , InitPoint , interval , n)) } = O(1) \ +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(LDUMK_2 , init_cond_2 , InitPoint , interval , n)) } +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(LDUMK_1 , init_cond_1 , InitPoint , interval , n)) .}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК ((4) или (12)), то преобразование процедурой `procedure_D_1` этого входа — алгебраическое.

Преобразование `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n = 0 ) ;` — алгебраическое.

APLAN - процедура 1 — линейная.

Сложность линейной процедуры тождественна сумме сложности её частей.

Сложность преобразования элементов `H_n` , `D_1` ЛДУМК (12) в это ЛДУМК не зависит от n .

$$Q(\ \texttt{LDUMK_1 := (D_1 + H_n = 0) ;}\ ) = O(1)\ .$$

Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК (в частности, ЛДУМК(4) и ЛДУМК (12)), то сложность преобразования APLAN - процедурой $procedure_D_1$ этого входа

$$Q(\ procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ )\ ) =$$
$$O(n^3)\ + Q(\ canplf(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G)\ )\ +$$
$$Q(\ canplf(E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a, b; \rho) = ?)\ )\ .$$

17. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

`D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n`

— APLAN - эквивалент входу алгоритма 1 (10)

$$\sim \quad (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

и имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 *порядка* k, *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда справедливо тождество

`procedure_D_2( D_1, init_cond_1,`

`LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n )` $=$

$algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$

$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ).$

Доказательство. Согласно теореме 1.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

Вход (13) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент входа алгоритма 1

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) \ .$$

Следовательно. APLAN - процедура 1 преобразует вход (13)
в APLAN - эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

18. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$. *Тогда:*

1. *Преобразование по алгоритму 1 (10) этого входа*

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

   алгебраическое.

2. *С ростом* n, *сложность преобразования (10) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ) \, ,$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ y = ? \ )$$

порядка k , *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует эквивалент входа алгоритма 1 в эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

19. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда результат преобразований этого входа по алгоритму 1 — полином (10)

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) =$$

$$(\ H_n = algorithm_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \, , \, init_cond_2(y,d) \, , \, [a,b] \, , \, n \ ) \, ,$$

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ H_n \ ) \ \rightarrow \ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0 \ ) \, ,$$

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0 \, , \, init_cond_1(y,d) \, , \, [a,b] \, , \, n \ ) \ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует результат преобразования (5) по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — полином

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 — ЛДУМК.

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Следовательно.

Уравнение преобразования (5)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0$$

тождественно ЛДУМК (12).

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\; A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,\; [a,b]\;,\; n\;)$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Согласно определению метода 1.

Полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

тождественен полиному (5)

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Согласно определению алгоритма 1.

Полином

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ )$$

тождественен полиному (10)

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$$

20. Класс $D_{2,X}$ систем задач Коши для ЛДУМК D_2

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к решению системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 \ +$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\ \ u = ?\,)\,,$$

где $\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2,$$

— линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами — результата эквивалентного преобразования системы задач Коши для ЛДУМК

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

типа D_2 (3), (4) по методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\ V^k[u_p]\ ] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\ ] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

где $p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\ ,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho)\ \to\ L_2^p(a,b;\rho)$$

(9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84). Доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\ ] = 0\,,$$

$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \textit{где}\quad p = n-k\,,$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *определяют класс* $D_{2,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК типа* D_2.

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,, \tag{25}$$

где $E_{p,X}[y^{(k)}] = \inf\limits_{c_0,\dots,c_p} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \dots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n-k\ ,$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *класса* $D_{3,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)$$

и решением этой системы ЛИУМК по методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\ ] = 0\,,$$

$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \text{где}\quad p = n - k\,.$$

Классы $D_{2,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{2,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_2 *представительны.*

21. Эквивалентность метода 1 и проекционного метода 1

Теорема 5. *Метод 1*

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

(5) решения системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

есть алгебраический эквивалент преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\qquad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

и решения системы ЛИУМК (6) проекционному методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Справедливы следующие утверждения.

1. Преобразование системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ .$$

по методу 1

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

(5) — *алгебраическое.*

2. Алгебраические полиномы (5)

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

— результаты преобразования по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

существуют тогда и только тогда, когда существуют полиномы (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0, 1, \ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

— результаты преобразования по проекционному методу 1 системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\ \ u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

— преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — и справедливы тождества

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \qquad H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.

Преобразование (5) системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 по методу 1 тождественно преобразованию (10) по алгоритму 1 эквивалента этой системе задач Коши

$$y_n = algorithm_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,.$$

Согласно теореме 3.

Преобразование по алгоритму 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 — алгебраическое.

Следовательно.

Преобразование по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 — алгебраическое.

Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 — ЛДУМК.

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_2 = G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\,,$$

$$P_{2,k-1} = Y_{2,0} + Y_{2,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{2,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,,$$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(7) и для этих полиномов справедливо тождество

$$H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Следовательно. Уравнения

$$A_1\cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0$$

преобразований (5) и (8) тождественны.

Для систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 это уравнение — ЛДУМК (12).

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\ ] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$
$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_1 = G_1 + D_1[P_{i,k-1}]\,,$$
$$P_{1,k-1} = Y_{1,0} + Y_{1,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{1,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,,$$
$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(8) и для этих полиномов справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

22. Эффективность метода 1

Следствие 1. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *тождественны коэффициенты оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *типа* D_2 *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

и дифференцированием полинома y_n

и преобразованием этой системы задач Коши в ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\qquad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

и решением этой системы ЛИУМК по проекционному методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) \;=\; a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\;, \quad \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\; i = 0, 1, \ldots\,,\; z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 5, в случае системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) для полиномов преобразования (5)

$$y_n = method_D_2(\; A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\,)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)$$

и полиномов (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\; S_p[\; A_2 \cdot u_p + D_2[\, V^k[u_p]\,] + g_2\;] = 0\;, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\;)\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)$$

справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\ .$$

Согласно определения системы ЛИУМК (6), решения $y(x)\,,\ H(x)$ системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) являются преобразованиями

$$y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}$$

решений $y^{(k)}(x)\,,\ H^{(k)}(x)$ системы ЛИУМК (6).

Следовательно. Тождественны результаты тождественных преобразований этих функций и полиномов — коэффициенты оптимальности (25)

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,.$$

23. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 13 доказывают следующее утверждение.

Вывод 14. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *ограничен коэффициент оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК порядка k *(3), (4) типа* D_2 *класса* $D_{2,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_2(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,$$
$$init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

и дифференцированием полинома y_n.

Класс $D_{2,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_2 *определяет проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1})\,]\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $p = n - k$,

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

решения преобразования этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_2 *— системы ЛИУМК (6)*

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \;= 0\;,\quad u = ?\;)\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\;A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 \;+ (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Классы $D_{2,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{2,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_2 *представительны.*

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 14.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 15. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают системы задач Коши для ЛДУМК порядка* k *(3), (4) типа* D_2

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\quad \text{где}$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования.

Дополнение

Метод 1'. Модификация метода 1.

$$y_n = method_D_2'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = method_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )\,.$$

Метод $method_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1.

$$y_n = algorithm_D_2'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = algorithm_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ H_n\ )\ \rightarrow\ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\ )\,,$$
$$y_n = algorithm_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ )\,.$$

Алгоритм $algorithm_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

APLAN - процедура 1'. Модификация APLAN - процедуры 1.

```
H_n := procedure_D'_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

       LDUMK_1 := ( D_1 + H_n = 0 ) ;

y_n := procedure_D'_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

APLAN - процедура `procedure_D'_1` рассмотрена в лекции 3.

Распространение метода 1, алгоритма 1 и процедуры 1 на уравнения

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H = 0 \ , \ init_cond_1(y, d) \ ,$$

где

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 = 0$$

— ЛДУМК типа D_1 и

H — композиция решений нескольких задач Коши для ЛДУМК типа D_1, строится и исследуется по приведенной выше схеме.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.
2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.
3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.
5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.
6. Верлань А. Ф. и Сизиков В. С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* — Киев: Наукова думка. — 1986. — 544 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 5

Программа для решения систем задач Коши для ЛДУМК типа D_3

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (1)$$

$$[a,b]\ ,\ n\ )\ =\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \qquad (2)$$

Эта процедура преобразует систему задач Коши для ЛДУМК типа D_3 *— линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами*

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,, \quad (3)$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (4)$$

где линейные дифференциальные операторы и начальные условия имеют вид

$$A_i \cdot y^{(k)} + D_i[y] = A_i \cdot y^{(k)} + B_i(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_i(x) \cdot y(x)\,,$$

$$init_cond_i(y,d)\ =\ \{\ y(d) = Y_{i,0}\,,\ y'(d) = Y_{i,1}\,,\ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{i,k-1}\ \}\,,\quad i = 1,2\,.$$

2. Метод 1 выполнения преобразования (1), (2)

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\,) \quad (5)$$
$$= (\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\ )\,.$$

Метод 1 — распространение на системы задач Коши для ЛДУМК типа D_3 (3), (4) алгоритмизации τ - метода Ланцоша [2] лекции 3.

Эта алгоритмизация основана на a - методе [3] и имеет уравнение (3.5)

$$H_n = solve(\ \ init_cond_2(y_n \in P_n = ?\,,\ d)\ \ ,$$
$$A_2 \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D_2[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )\,.$$

Неизвестные уравнений (3.5) и (5) — (символьные) коэффициенты полиномов

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ ,\ \{c_0,\ldots,c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} = ?\,,$$
$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1 \cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} = ?\,.$$

3. Интегральный эквивалент задаче Коши (3), (4)

Начальные условия системы задач Коши (3), (4) определяют подстановку

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \qquad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad \text{где} \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2\,.$$

Эта подстановка преобразует систему ЛДУМК (3), (4) в систему линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$H^{(k)} = solve(\ A_2\cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\,A_1\cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + G_1 + D_1[P_{1,k-1}] + \tag{6}$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1})\cdot(V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\ u = ?\,)\,.$$

Система ЛИУМК Вольтерра (6) имеет решение $H^{(k)}(x)\,,\ y^{(k)}(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $H(x)\,,\ y(x)$ система задач Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \qquad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$y_n^{(k)} = G_method_I_3(\ H^{(k)} = solve(\ A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$
$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\ u = ?\ )\,,$$
$$[a,b]\,,\ p\ )\ =$$
$$(\ H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,, \quad (7)$$
$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\ )\,. \quad (8)$$

Неизвестные уравнений (7), (8) — коэффициенты $a_0,\ a_1, \ldots, a_p$ полинома

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

где $\quad T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ \ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,\ \ p = n - k\,.$

Оператор S_p преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,. \quad (9)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачи Коши для ЛДУМК (4) и системы задач Коши для ЛДУМК типа D_3 (3), (4) применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши для ЛДУМК в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (7) в пространстве $C_{[a,b]}, \ldots$ определяют [4] (глава 3) аппроксимационные характеристики оператора S_p (9).

$$A_2 = 1 \ \rightarrow\ \|H^{(k)} - H_n^{(k)}\|_X = (1+o(1)) \cdot \|H^{(k)} - S_p[H^{(k)}]\|_X\,,\ X = C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,.$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгебраический алгоритм 1 метода 1

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ , \quad (10)$$

где $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ — оператор уравнения (3).
Этот оператор и функция H определяют уравнение (3) типа D_3.

1. По алгоритму 3.1 преобразовать задачу Коши для ЛДУМК входа (10) в полином

$$H_n = algorithm_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \quad (11)$$

2. Преобразовать оператор $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ входа (10) и полином H_n (11) в ЛДУМК

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ . \quad (12)$$

3. По алгоритму 3.1 преобразовать ЛДУМК (12) и условия $init_cond_1(y,d)$ в полином (10)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

7. Вход APLAN - процедуры 1

$$\begin{array}{c} \texttt{(D_1 , init_cond_1 ,} \\ \texttt{LDUMK_2 , init_cond_2 , InitPoint , interval , n)} \qquad (13) \\ \sim \quad (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) \, . \end{array}$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

`InitPoint := d`	$\sim$	d	.	Начальная точка задачи Коши.
`interval := (a, b)`	$\sim$	$[a,b]$	.	Отрезок аппроксимации.
`n`	$\sim$	$n \in N$	.	Порядок полинома y_n (10).

Оператор уравнения (3)

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0 \ ) =$$

$$A_1(x) \cdot y^{(k)}(x) + B_1(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_1(x) \cdot y(x) + G_1(x) + H(x) \cdot y(x) = 0$$

имеет APLAN - эквивалент — оператор `D_1 :=`

`A_1 * dif(y , k) + B_1 * dif(y , k-1) + ⋯ + C_1 * y + G_1 ; .` (14)

Начальные условия (3)

$$init_cond_1(y,d) \;=\; \{\, y(d) = Y_{1,0}\,,\; y'(d) = Y_{1,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{1,k-1}\,\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

`init_cond_1 :=`

`( y =` $Y_{1,0}$, `dif(y , 1) =` $Y_{1,1}$, `... , dif(y , k-1) =` $Y_{1,k-1}$ `) ; .`

ЛДУМК (4)

$$(\; A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\;) \;=$$

$$(\, A_2(x)\cdot y^{(k)}(x) + B_2(x)\cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_2(x)\cdot y(x) + G_2(x) = 0\,)$$

имеет APLAN - эквивалент

`LDUMK_2 := ( A_2 * dif(y , k) + B_2 * dif(y , k-1) + ⋯ +`

```
C_2 * y + G_2 = 0 ) ; .
```
(15)

Начальные условия (4)

$$init_cond_2(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_{2,0}\,,\; y'(d) = Y_{2,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{2,k-1}\;\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

```
init_cond_2 :=
```

(y = $Y_{2,0}$, dif(y , 1) = $Y_{2,1}$,... , dif(y , k-1) = $Y_{2,k-1}$) ; .

Составляющие оператора (14), уравнения (15) и эквивалента условий.

Атомы `y , x`

— APLAN - эквивалент искомой функции y и независимого аргумента x .

```
NAME  A_1 , B_1 ,..., C_1 , G_1 , A_2 , B_2 ,..., C_2 , G_2
```

— термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^ ,`

— APLAN - эквивалент полиномов

$A_1(x)$, $B_1(x)$,..., $C_1(x)$, $G_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$,..., $C_2(x)$, $G_2(x)$.

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_3$

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;

y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

Преобразования процедуры 1 — APLAN - эквивалент преобразований.

$$H_n = procedure_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ) =$$

$$subs(\ H = H_n,\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ )\ ).$$

$$y_n = procedure_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

Замечание 1. APLAN - процедура $procedure_D_1$ построена в лекции 3.

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,, \tag{16}$$

$$H(x) = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1\,,\ y = ?\ ) \tag{17}$$

на отрезке $[-1, 1]$.

```
D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 ;
init_cond_1 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = 1 ) ;
LDUMK_2 := ( dif(y , 2) + dif(y , 1) = 0 ) ;
init_cond_2 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = -1 ) ;
interval := (-1,1) ;
```
(18)

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (18)

```
                                n := 3 ;
H_n =        1 + -1 * x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(-2,9) * x ^ 3 ;
LDUMK_1 =                  ( dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 +
( 1 + -1 * x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(-2,9) * x ^ 3 ) * y = 0 );
y_n =  1 + x + rat(5385,9131) * x ^ 2 + rat(1746,9131) * x ^ 3 ;
```

Результаты преобразования входа (18) в классическом виде.

$$H_n = 1 - x + 2/3 \cdot x^2 - 2/9 \cdot x^3 \ .$$

$$(\ y'' - y' - 1 + H_n * y = 0 \ ) \ =$$

$$y'' - y' - 1 + (1 - x + 2/3 \cdot x^2 - 2/9 \cdot x^3) * y = 0 \ .$$

$$y_n = 1 + x + 5385/9131 \cdot x^2 + 1746/9131 \cdot x^3 \ .$$

11. Наилучшее приближение решения модельной задачи

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y = 0\,,\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 1\ )\,. \quad (19)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y(x) = \exp(x)$ (решения задачи Коши (16), (17)) на отрезке $[-1, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_i(\exp(x), [-1, 1])\}_{i=1}^{15} = \{1.13,\ 0.27,\ 0.044,\ 0.0054,\ 0.00054,\ 4.5 \cdot 10^{-5},\ 3.2 \cdot 10^{-6},$$

$$2 \cdot 10^{-7},\ 1.1 \cdot 10^{-8},\ 5.5 \cdot 10^{-10},\ 2.5 \cdot 10^{-11},\ 10^{-12},\ 4 \cdot 10^{-14},\ 1.4 \cdot 10^{-15},\ 10^{-16}\}\,. \quad (20)$$

Коэффициенты (20) регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$a_n(\exp(x), [-1, 1]) = |a_n(\exp(-x), [-1, 1])| = (1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n} \cdot t_n(\ \exp(x)\ ) =$$
$$(1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n}/n!\ ,\quad a_{n+1}(\exp(x), [-1, 1])/a_n(\exp(x), [-1, 1]) = \beta_n =$$
$$(1 + \gamma_{n+1})/(1 + \gamma_n)/(2 \cdot (n + 1)) \approx 1/(n + 1)/2\ ,\ \text{где}\ \{\ \beta_n\ ,\ n = 1, \ldots, 13\ \} =$$
$$\{\ 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\ \}\ .$$

Функция $\exp(x)$ — целая. Норма многочлена Чебышева тождественна 1.

$$\|\cos(i \cdot \arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i \cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств и тождества (20) следуют утверждения.

Вывод 1. *Величина наилучшего приближения функций* $\exp(x)$, $\exp(-x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)] = E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\;) \;=\; \Theta(\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\;)$ — *коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}}\;) .$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; (1+\delta_n) \cdot a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;, \quad (21)$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1) \;, \qquad \{\; \beta_n \;,\; n = 1,\ldots,13 \;\} =$

$\{\; 0.24,\; 0.16,\; 0.12,\; 0.1,\; 0.08,\; 0.07,\; 0.06,\; 0.055,\; 0.05,\; 0.045,\; 0.042,\; 0.038,\; 0.032 \;\}$.

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) +}\ \ldots\ (18)\ ) \tag{22}$$

имеет главную часть $\Theta(\ C_n\ )$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )\ .$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ =$$

$$(1 + \delta_n) \ \cdot \ \| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ )\ . \tag{23}$$

Вывод 3. *Величина наилучшего приближения функций* $\exp(x)\,,\ \exp(-x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C^k_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k_{[-1,1]}} \ = \ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)] = E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)] =$$

$$\max\{\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,,\ E_{n-1,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))']\,,\ldots,\ E_{n-k,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))^{(k)}]\}$$

имеет главную часть $\Theta(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)]\ )$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1-k$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]\,.$

$$a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1]) \ = \ \Theta(\ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k_{[-1,1]}}\ )\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k 1_{[-1,1]}} \ = \ (1+\delta_{n-k}) \cdot a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1])\ ,$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1)\ , \qquad \{\ \beta_n\ ,\ n = 1,\ldots,13\ \} =$

$\{\ 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\ \}\,.$

Вывод 4. *В пространстве* $C^k_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^k_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (22) процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

имеет главную часть $\Theta(\ C^k_n\ )$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^k_n\ )\ .$$

Справедливо тождество $\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \ =$

$$(1 + \delta_{n-k}) \ \cdot \ \| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ )\,.$$

12. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[-1,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\| \exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{6} = \{\ 0.72,\ 0.25,\ 0.063,\ 0.021,\ 0.00078,\ 0.0002\ \}\,. \quad (24)$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 2 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 5. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} / a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) = A_n\,, \qquad \text{где}$$

$$\{\ A_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^{3} \ = \ \{\ 6,\ 39,\ 62\ \}\,, \qquad \{\ A_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^{3} \ = \ \{\ 3,\ 12,\ 17\ \}\,.$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^1_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\ \| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} = \| \exp(x)' - y_n' \|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=1}^{6} =$$

$$\{\ 1.72,\ 0.79,\ 0.093,\ 0.052,\ 0.0015,\ 0.00034\ \}.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ a_n(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^1_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = B_n\ ,$$

где $\{\ B_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^{3} \ = \ \{\ 3,\ 10,\ 8\ \}$, $\{\ B_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^{3} \ = \ \{\ 1.5,\ 2,\ 2.8\ \}$.

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^2_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\ \|\exp(x) - y_n\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|\exp(x)'' - y_n''\|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=1}^{6} =$$

$$\{\ 2.7,\ 1.8,\ 0.39,\ 0.079,\ 0.0059,\ 0.001\ \}.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 7. *В пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^2_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^2_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^2_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^2_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} / a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) = 1 + \alpha_n\ ,$$

$$\text{где}\quad \{\alpha_n\}_{n=2}^{6} = \{\ 0.6,\ 0.4,\ 0.8,\ 0.09,\ 0.8\ \}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}$ *второй производной решения задачи Коши (16), (17)*

$$y''(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

второй производной результата преобразования процедурой 1 входа (18)

$$y_n''(x) = (\ procedure_D_3(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) ...}\ (18)\ )''$$

(22) имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[-1,1]}$ *) приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* $n-2$

$$\Theta(\ \| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-2}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}}\,.$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-1}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ (1 + \delta_{n-2})\,.$$

Полиномы $y_n''\ ,\ n = 1, \dots, 12$ (22) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $\exp(x)$ в пространстве $C_{[-1,1]}$.

13. Сравнение процедуры 1 и интегрального метода [6]

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ \ u(0) = 1\,,\ \ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно.

Из этих тождеств и тождества (24) следует утверждение.

Вывод 9. *Погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ , \quad x \in [0,1]$$

по интегральному методу с формулой трапеций [6] (с. 48),
где число узлов $q = 10$ *и* $q = 40$ *,*

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

больше погрешности (24) решения системы задач Коши для ЛДУМК (16), (17) APLAN - процедурой 1, где параметр $n = 6$ *и* 5 *, соответственно.*

$$\| \exp(x) - y_6 \|_{C_{[0,1]}} = 0.0002\,,$$

$$\| \exp(x) - y_5 \|_{C_{[0,1]}} = 0.00078\,.$$

Из этих тождеств, тождества (24) и классических оценок погрешности метода механических квадратур с формулой трапеций [6] следует утверждение.

Вывод 10. *Если число узлов* q *интегрального метода с формулой трапеций [6] (с. 48) растет, то погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

по этому методу [6] (с. 48) убывает как полином.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |\exp(-2 \cdot i/q) - u_h(i/q)| = O(1/q^2)\ .$$

Если параметр n *входа (18) APLAN - процедуры — порядок полинома (22)*

$y_n = procedure_D_3($ (`D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +`, ..., n) (18))

растет, то погрешность (24) решения задачи Коши (16), (17) APLAN - процедурой 1 убывает более быстро, чем полином.

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} = o(p^n)\ , \qquad p \approx 0.1\ .$$

14. Сравнение APLAN - процедуры 1 и метода

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ]\,.$$

Согласно методу $P_q[u_h]$ задачу Коши $F[u] = 0$, в частности задачу Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

по интегральному методу [6] преобразуют в сеточную функцию

$$u_h \ = \ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ , \quad h = (b-a)/q\ ,$$

и интерполируют эту функцию алгебраическим полиномом порядка q .

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности метода $P_q[u_h]$ не меньше погрешности интегрального метода [6] (вычисления сеточного решения u_h).

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $u(x) = \exp(-2 \cdot x)$ — решения задачи Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

на отрезке $[0,1]$ принимают значения

$$\{a_i(u,[0,1])\}_{i=0}^{15} = \{1.86,\ -1.66,\ 0.4,\ -0.065,\ 0.008,\ -0.0008,$$

$$6.6\cdot 10^{-5},\ -4.7\cdot 10^{-6},\ 2.9\cdot 10^{-7},\ -1.6\cdot 10^{-8},\ 8\cdot 10^{-10},$$

$$-3.7\cdot 10^{-11},\ 1.5\cdot 10^{-12},\ -5.9\cdot 10^{-14},\ 2.1\cdot 10^{-15},\ -2.2\cdot 10^{-17}\ \}\ .$$

Эти коэффициенты регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$\{\ |a_{i+1}(u,[0,1])|\ /\ |a_i(u,[0,1])| = \gamma_i\ \}_{i=0}^{14} = \{\ 0.9,\ 0.25,\ 0.17,\ 0.13,$$

$$0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.04,\ 0.038,\ 0.03,\ 0.01\ \}\ .$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2\cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2\cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5\cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 11. *В пространстве* $C_{[0,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| u - P_q[u_h] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши

$$(\ F[u] = 0\ ) = (\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ )$$

в ее решение

$$u(x) = \exp(-2 \cdot x) = solve(\ (\ F[u] = 0\ )\ )$$

преобразованием этой задачи Коши в полином по методу $P_q[u_h]$

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [0,1]\,,\ q\ )\ ]$$

имеет главную часть $\Theta(\ C_n\ )$. *Эта главная часть тождественна отношению*

$$\| u - P_q[u_h] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| \ = \ \Theta(\ \| u - P_q[u_h] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)]\ )\ .$$

Справедливо тождество

$$\| u - P_q[u_h] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| = \| u - P_q[u_h] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \cdot (1 + o(1))\ .$$

В случае $q = 10$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{10}[u_{h=1/10}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,10} | \exp(-2 \cdot i/10) - u_{h=1/10}(i/10) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$0.007 \ / \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \ \approx \ 760\ 000\ 000 \, .$$

В случае $q = 40$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{40}[y_{h=1/40}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| / o(p^n) \ ,$$

где $p \leq 1/20$, *и, следовательно, она не меньше*

$$4.5 \cdot 10^{-4} \ / \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \cdot 20^{30} \ \approx \ 5 \cdot 10^{46} \ .$$

Из этих неравенств и выводов 5, 6 и 7 следует утверждение.

Вывод 12. *Метод* $P_q[u_h]$ *преобразования задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

в алгебраический полином порядка q *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y] = 0\,, \quad solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ ) = y(x) \quad x \in [a,b]\,, \quad y(x) \in X\,,$$

где пространство $X = C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots,$ *в полином порядка* n

$$y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) \ = \ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,.$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности *в пространстве* X

$$\|y - y_n\|_X \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

аппроксимации преобразования (функции) $y(x) = solve(\ F[y] = 0\ )\,,\ x \in [a,b]$ *преобразованием (полиномом)* $y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$

15. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

Выход оператора `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;`
— APLAN - эквивалент вида (14) ЛДУМК (12)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,.$$

Выход оператора

```
y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

16. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

```
D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n
```

имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда.

1. APLAN - процедура 1 — алгебраическое преобразование входа (13).

2. Для сложности преобразования APLAN - процедурой 1 входа (13) справедливо тождество

$$Q(\ \texttt{procedure_D_3(\ D_1\ ,\ init_cond_1\ ,}$$

$$\texttt{LDUMK_2\ ,\ init_cond_2\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )} = O(1)\ +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(\ LDUMK_2\ ,\ init_cond_2\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )} +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(\ LDUMK_1\ ,\ init_cond_1\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК ((4) или (12)), то преобразование процедурой `procedure_D_1` этого входа — алгебраическое.

Преобразование `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;` — алгебраическое.

APLAN - процедура 1 — линейная.

Сложность линейной процедуры тождественна сумме сложности её частей.

Сложность преобразования элементов `H_n` , `D_1` ЛДУМК (12) в это ЛДУМК не зависит от n .

$$Q(\ \texttt{LDUMK_1 := (D_1 + H_n * y = 0) ;}\ ) = O(1)\ .$$

Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК (в частности, ЛДУМК(4) и ЛДУМК (12)), то сложность преобразования APLAN - процедурой $procedure_D_1$ этого входа

$$Q(\ procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ )\ ) =$$
$$O(n^3)\ + Q(\ canplf(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G)\ )\ +$$
$$Q(\ canplf(E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a, b; \rho) = ?)\ )\ .$$

17. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

`D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n`

— APLAN - эквивалент входу алгоритма 1 (10)

$$\sim \quad (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

и имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 *порядка* k, *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда справедливо тождество

`procedure_D_3( D_1, init_cond_1,`

`LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n )` $=$

$$algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ).$$

Доказательство. Согласно теореме 1.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

Вход (13) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент входа алгоритма 1

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) \ .$$

Следовательно. APLAN - процедура 1 преобразует вход (13)
в APLAN - эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

18. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$. *Тогда:*

1. *Преобразование по алгоритму 1 (10) этого входа*

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

   алгебраическое.

2. *С ростом* n, *сложность преобразования (10) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ) ,$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ y = ? \ )$$

порядка k, *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует эквивалент входа алгоритма 1 в эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

19. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда результат преобразований этого входа по алгоритму 1 — полином (10)

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) =$$

$$(\ H_n = algorithm_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \, , \, init_cond_2(y,d) \, , \, [a,b] \, , \, n \,) \, ,$$

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ H_n \ ) \ \rightarrow \ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0 \ ) \, ,$$

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0 \, , \, init_cond_1(y,d) \, , \, [a,b] \, , \, n \,) \ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует результат преобразования (5) по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — полином

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 — ЛДУМК.

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Следовательно.

Уравнение преобразования (5)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0$$

тождественно ЛДУМК (12).

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\; A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,\; [a,b]\;,\; n\;)$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Согласно определению метода 1.

Полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

тождественен полиному (5)

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Согласно определению алгоритма 1.

Полином

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\ )$$

тождественен полиному (10)

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$$

20. Класс $D_{3,X}$ систем задач Коши для ЛДУМК D_3

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к решению системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \;= 0\;,\quad u = ?\;)\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\;A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 \;+$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где $\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2,$$

— линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами — результата эквивалентного преобразования системы задач Коши для ЛДУМК

$$y = solve(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,\; y = ?\;)\,,$$

$$H = solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\;,\; init_cond_2(y,d)\;,\; y = ?\;)$$

типа D_3 (3), (4) по методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\ V^k[u_p]\ ] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\ ] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

где $p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0, 1, \ldots\ ,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho)\ \to\ L_2^p(a,b;\rho)$$

(9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84). Доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\ ] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \textit{где}\quad p = n-k\,,$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *определяют класс* $D_{3,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК типа* D_3.

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,, \tag{25}$$

где

$$E_{p,X}[y^{(k)}] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\qquad p = n-k\ ,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *класса* $D_{3,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)$$

ЛИУМК (6) и решением этой системы ЛИУМК по методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\ ] = 0\,,$$

$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \text{где}\quad p = n - k\,.$$

Классы $D_{3,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{3,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_3 *представительны.*

21. Эквивалентность метода 1 и проекционного метода 1

Теорема 5. *Метод 1*

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

(5) решения системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

есть алгебраический эквивалент композиции преобразований:

1. *Преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему ЛИУМК (6)*

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 +$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,, \quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,, \quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2\,,$$

2. Решения системы ЛИУМК (6) проекционному методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ , \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) \ = \ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ , \quad \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Справедливы следующие утверждения.

1. Преобразование системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

по методу 1

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

(5) — *алгебраическое.*

2. Алгебраические полиномы (5)

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

— результаты преобразования по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

существуют тогда и только тогда, когда существуют полиномы (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0, 1, \ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

— результаты преобразования по проекционному методу 1 системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1, 2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1, 2\,,$$

— преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — и справедливы тождества

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,,\qquad H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.

Преобразование (5) системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 по методу 1 тождественно преобразованию (10) по алгоритму 1 эквивалента этой системе задач Коши

$$y_n = algorithm_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,.$$

Согласно теореме 3.

Преобразование по алгоритму 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 — алгебраическое.

Следовательно.

Преобразование по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 — алгебраическое.

Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 — ЛДУМК.

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_2 = G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\,,$$

$$P_{2,k-1} = Y_{2,0} + Y_{2,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{2,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,,$$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(7) и для этих полиномов справедливо тождество

$$H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Следовательно. Уравнения

$$A_1\cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n\cdot y = 0$$

преобразований (5) и (8) тождественны.

Для систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 это уравнение — ЛДУМК (12).

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1\ +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\ ] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_1 = G_1 + D_1[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{1,k-1} = Y_{1,0} + Y_{1,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{1,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(8) и для этих полиномов справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

22. Эффективность метода 1

Следствие 1. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *тождественны коэффициенты оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *типа* D_3 *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

и дифференцированием полинома y_n
и преобразованием этой системы задач Коши в ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\, V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\, V^k[u]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,,$$

и решением этой системы ЛИУМК по проекционному методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\, V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) \;=\; a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\;, \quad \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\; i = 0, 1, \ldots\,,\; z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 5, в случае системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) для полиномов преобразования (5)

$$y_n = method_D_2(\; A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\,)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)$$

и полиномов (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\; S_p[\; A_2 \cdot u_p + D_2[\, V^k[u_p]\,] + g_2\;] = 0\;, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\;)\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)$$

справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\ .$$

Согласно определения системы ЛИУМК (6), решения $y(x)\,,\ H(x)$ системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) являются преобразованиями

$$y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}$$

решений $y^{(k)}(x)\,,\ H^{(k)}(x)$ системы ЛИУМК (6).

Следовательно. Тождественны результаты тождественных преобразований этих функций и полиномов — коэффициенты оптимальности (25)

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,.$$

23. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 13 доказывают следующее утверждение.

Вывод 14. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *ограничен коэффициент оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК порядка k *(3), (4) типа* D_3 *класса* $D_{3,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_3(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,$$
$$init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\quad)$$

и дифференцированием полинома y_n.

Класс $D_{3,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_3 *определяет проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u_p] + P_{1,k-1})\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $p = n - k$,

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

решения преобразования этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_3 *— системы ЛИУМК (6)*

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \;= 0\,, \quad u = ?\,)\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\;A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 \; +$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^k[u] + P_{1,k-1}) = 0\,, \quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,, \quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2\,.$$

Классы $D_{3,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{3,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_3 *представительны.*

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 14.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 15. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают системы задач Коши для ЛДУМК порядка* k *(3), (4) типа* D_3

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ \text{где}$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования.

Дополнение

Метод 1'. Модификация метода 1.

$$y_n = method_D_3'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$
$$(\ H_n = method_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )\,.$$

Метод $method_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1.

$$y_n = algorithm_D_3'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = algorithm_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ H_n\ )\ \rightarrow\ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\ )\,,$$
$$y_n = algorithm_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ )\,.$$

Алгоритм $algorithm_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

APLAN - процедура 1'. Модификация APLAN - процедуры 1.

```
H_n := procedure_D'_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

     LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;

y_n := procedure_D'_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

APLAN - процедура `procedure_D'_1` рассмотрена в лекции 3.

Распространение метода 1, алгоритма 1 и процедуры 1 на уравнения

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0 \ , \ init_cond_1(y, d) \ ,$$

где

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 = 0$$

— ЛДУМК типа D_1 и

H — композиция решений нескольких задач Коши для ЛДУМК типа D_1, строится и исследуется по приведенной выше схеме.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.
2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.
3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.
5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.
6. Верлань А. Ф. и Сизиков В. С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* — Киев: Наукова думка. — 1986. — 544 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 6

Программа для решения систем задач Коши для ЛДУМК типа D_4

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (1)$$

$$[a,b]\ ,\ n\ )\ =\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \qquad (2)$$

Эта процедура преобразует систему задач Коши для ЛДУМК типа D_4 *— линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами*

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,, \quad (3)$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ , \qquad (4)$$

где линейные дифференциальные операторы и начальные условия имеют вид

$$A_i \cdot y^{(k)} + D_i[y] = A_i \cdot y^{(k)} + B_i(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_i(x) \cdot y(x)\,,$$

$$init_cond_i(y,d)\ =\ \{\ y(d) = Y_{i,0}\,,\ y'(d) = Y_{i,1}\,,\ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{i,k-1}\ \}\,,\quad i = 1,2\,.$$

2. Метод 1 выполнения преобразования (1), (2)

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\,) \quad (5)$$
$$= (\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\ )\,.$$

Метод 1 — распространение на системы задач Коши для ЛДУМК типа D_4 (3), (4) алгоритмизации τ - метода Ланцоша [2] лекции 3.

Эта алгоритмизация основана на a - методе [3] и имеет уравнение (3.5)

$$H_n = solve(\ \ init_cond_2(y_n \in P_n = ?\,,\ d)\ \ ,$$
$$A_2 \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D_2[y_n \in P_n = ?] + G + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )\,.$$

Неизвестные уравнений (3.5) и (5) — (символьные) коэффициенты полиномов

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0,\ldots,c_n\} = ?\,,$$
$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1 \cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p} \cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_1,\ldots,\tau_{m-p}\} = ?\,.$$

3. Интегральный эквивалент для задачи Коши (3), (4)

Начальные условия системы задач Коши (3), (4) определяют подстановку

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \qquad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad \text{где} \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,, \quad i = 1,2\,.$$

Эта подстановка преобразует систему ЛДУМК (3), (4) в систему линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$\begin{gathered} H^{(k)} = solve(\ A_2\cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,, \\ y^{(k)} = solve(\ A_1\cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + G_1 + D_1[P_{1,k-1}] + \\ (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1})\cdot(V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\ u = ?\,)\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Система ЛИУМК Вольтерра (6) имеет решение $H^{(k)}(x)\,,\ y^{(k)}(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $H(x)\,,\ y(x)$ система задач Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}\,, \qquad y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$y_n^{(k)} = G_method_I_4(\ H^{(k)} = solve(\ A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P_{1,k-1}^{(i)}) = 0\,,\ u = ?\,)\,,$$

$$[a,b]\,,\ p\ )\ =$$

$$(\ H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,, \quad (7)$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\ )\,. \quad (8)$$

Неизвестные уравнений (7), (8) — коэффициенты $a_0,\ a_1, \ldots, a_p$ полинома

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

где $\quad T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ \ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,\ \ p = n - k\,.$

Оператор S_p преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,. \quad (9)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачи Коши для ЛДУМК (4) и системы задач Коши для ЛДУМК типа D_4 (3), (4) применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши для ЛДУМК в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (7) в пространстве $C_{[a,b]}, \ldots$ определяют [4] (глава 3) аппроксимационные характеристики оператора S_p (9).

$$A_2 = 1 \ \rightarrow\ \|H^{(k)} - H_n^{(k)}\|_X = (1+o(1)) \cdot \|H^{(k)} - S_p[H^{(k)}]\|_X\,,\ X = C_{[a,b]}\,,\ L_2(a,b;\rho)\,.$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгебраический алгоритм 1 метода 1

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ i\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ , \quad (10)$$

где $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ — оператор уравнения (3).
Этот оператор, i и функция H определяют уравнение (3).

1. По алгоритму 3.1 преобразовать задачу Коши для ЛДУМК входа (10) в полином

$$H_n = algorithm_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ . \quad (11)$$

2. Преобразовать оператор $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1$ и $i \in N$ входа (10) и полином H_n (11) в ЛДУМК

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ . \quad (12)$$

3. По алгоритму 3.1 преобразовать ЛДУМК (12) и условия $init_cond_1(y,d)$ в полином (10)

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

7. Вход APLAN - процедуры 1

$$\begin{aligned} &(\ \texttt{D_1}\ ,\ \texttt{init_cond_1}\ ,\ \texttt{i}\ ,\\ &\texttt{LDUMK_2}\ ,\ \texttt{init_cond_2}\ ,\ \texttt{InitPoint}\ ,\ \texttt{interval}\ ,\ \texttt{n}\ ) \qquad (13)\\ \sim\quad &(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ i\ ,\\ &A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ). \end{aligned}$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

`InitPoint := d` $\sim$ d . Начальная точка задачи Коши.

`interval := (a, b)` $\sim$ $[a,b]$. Отрезок аппроксимации.

`n` $\sim$ $n \in N$. Порядок полинома y_n (10).

`i` $\sim$ $i \in N$. Порядок производной (10).

Оператор (3) $A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 =$

$$A_1(x) \cdot y^{(k)}(x) + B_1(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_1(x) \cdot y(x) + G_1(x)$$

имеет APLAN - эквивалент — оператор `D_1 :=`

`A_1 * dif(y , k) + B_1 * dif(y , k-1) + ⋯ + C_1 * y + G_1 ; .` (14)

Начальные условия (3)

$$init_cond_1(y,d) \;=\; \{\, y(d) = Y_{1,0}\,,\; y'(d) = Y_{1,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{1,k-1} \,\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

`init_cond_1 :=`

`( y =` $Y_{1,0}$, `dif(y , 1) =` $Y_{1,1}$, `... , dif(y , k-1) =` $Y_{1,k-1}$ `) ; .`

ЛДУМК (4)

$$(\; A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \;) \;=$$

$$(\, A_2(x) \cdot y^{(k)}(x) + B_2(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C_2(x) \cdot y(x) + G_2(x) = 0 \,)$$

имеет APLAN - эквивалент

`LDUMK_2 := ( A_2 * dif(y , k) + B_2 * dif(y , k-1) + ⋯ +`

```
C_2 * y + G_2 = 0 ) ; .
```
(15)

Начальные условия (4)

$$init_cond_2(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_{2,0}\,,\; y'(d) = Y_{2,1}\,,\ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{2,k-1}\;\}$$

имеют APLAN - эквивалент — точка `InitPoint := d ;` и список уравнений

```
init_cond_2 :=
```

(y = $Y_{2,0}$, dif(y , 1) = $Y_{2,1}$,... , dif(y , k-1) = $Y_{2,k-1}$) ; .

Составляющие оператора (14), уравнения (15) и эквивалента условий.

Атомы `y , x`

— APLAN - эквивалент искомой функции y и независимого аргумента x .

```
NAME  A_1 , B_1 ,..., C_1 , G_1 , A_2 , B_2 ,..., C_2 , G_2
```

— термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^ ,`

— APLAN - эквивалент полиномов

$A_1(x)$, $B_1(x)$,..., $C_1(x)$, $G_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$,..., $C_2(x)$, $G_2(x)$.

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_4$

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * dif(y,i) = 0 ) ;

y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

Преобразования процедуры 1 — APLAN - эквивалент преобразований.

$$H_n = procedure_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ) =$$

$$subs(\ H = H_n,\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ )\ ).$$

$$y_n = procedure_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ).$$

Замечание 1. APLAN - процедура $procedure_D_1$ построена в лекции 3.

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,, \tag{16}$$

$$H(x) = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1\,,\ y = ?\ ) \tag{17}$$

на отрезке $[-1, 1]$.

```
D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 ;
init_cond_1 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = 1 ) ;
LDUMK_2 := ( dif(y , 2) + dif(y , 1) = 0 ) ;
init_cond_2 := ( y = 1 ,  dif(y , 1) = -1 ) ;
i := 2 ;  interval := (-1,1) ;
```
(18)

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (18)

```
n := 3 ;
H_n =       1 + x + rat(2,3) * x ^ 2 + rat(2,9) * x ^ 3 ;
LDUMK_1 = ( dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + -1 + ( 1 + x +
rat(2,3) * x ^ 2 + rat(2,9) * x ^ 3 ) * dif(y , 2) = 0 );
y_n =  1 + x + rat(10,29) * x ^ 2 + rat(26,145) * x ^ 3 ;
```

Результаты преобразования входа (18) в классическом виде.

$$H_n = 1 + x + 2/3 \cdot x^2 + 2/9 \cdot x^3 \,.$$

$$(\ y'' - y' - 1 + H_n \cdot y'' = 0\ ) =$$

$$y'' - y' - 1 + (1 + x + 2/3 \cdot x^2 + 2/9 \cdot x^3) \cdot y'' = 0 \,.$$

$$y_n = 1 + x + 10/29 \cdot x^2 + 26/145 \cdot x^3 \,.$$

11. Наилучшее приближение решения модельной задачи

$$y(x) = \exp(x) = solve(\, y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y'' = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,)\,. \quad (19)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y(x) = \exp(x)$ (решения задачи Коши (16), (17)) на отрезке $[-1, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_i(\exp(x), [-1, 1])\}_{i=1}^{15} = \{1.13,\ 0.27,\ 0.044,\ 0.0054,\ 0.00054,\ 4.5 \cdot 10^{-5},\ 3.2 \cdot 10^{-6},$$

$$2 \cdot 10^{-7},\ 1.1 \cdot 10^{-8},\ 5.5 \cdot 10^{-10},\ 2.5 \cdot 10^{-11},\ 10^{-12},\ 4 \cdot 10^{-14},\ 1.4 \cdot 10^{-15},\ 10^{-16}\}\,. \quad (20)$$

Коэффициенты (20) регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$a_n(\exp(x), [-1, 1]) = |a_n(\exp(-x), [-1, 1])| = (1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n} \cdot t_n(\, \exp(x)\,) =$$
$$(1 + \gamma_n) \cdot 2^{-n}/n!\,, \quad a_{n+1}(\exp(x), [-1, 1])/a_n(\exp(x), [-1, 1]) = \beta_n =$$
$$(1 + \gamma_{n+1})/(1 + \gamma_n)/(2 \cdot (n + 1)) \approx 1/(n + 1)/2\,, \text{ где } \{\, \beta_n\,,\ n = 1, \ldots, 13\,\} =$$
$$\{\, 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\,\}\,.$$

Функция $\exp(x)$ — целая. Норма многочлена Чебышева тождественна 1.

$$\|\cos(i \cdot \arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i \cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\,.$$

Следовательно. Из этих тождеств и тождества (20) следуют утверждения.

Вывод 1. *Величина наилучшего приближения функций* $\exp(x)$, $\exp(-x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)] = E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\;) \;=\; \Theta(\; E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\;)$ — *коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$.

$$a_{n+1}(\exp(x),[-1,1]) \;=\; \Theta(\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}}\;).$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \|_{C_{[-1,1]}} \;=\; (1+\delta_n)\cdot a_{n+1}(\exp(x),[-1,1])\;, \quad (21)$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1)\;, \qquad \{\; \beta_n \;,\; n = 1,\ldots,13 \;\} =$

$\{\; 0.24,\; 0.16,\; 0.12,\; 0.1,\; 0.08,\; 0.07,\; 0.06,\; 0.055,\; 0.05,\; 0.045,\; 0.042,\; 0.038,\; 0.032 \;\}$.

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) +}\ \ldots\ (18)\ ) \tag{22}$$

имеет главную часть $\Theta(\ C_n\ )$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )\ .$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ =$$

$$(1 + \delta_n) \ \cdot \ \| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ )\ . \tag{23}$$

Вывод 3. *Величина наилучшего приближения функций* $\exp(x)\,,\ \exp(-x)$ *алгебраическими многочленами порядка* n *в пространстве* $C^k_{[-1,1]}$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k_{[-1,1]}} \ = \ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)] = E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)] =$$

$$\max\{\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)]\,,\ E_{n-1,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))']\,,\ldots,\ E_{n-k,C_{[-1,1]}}[(\exp(x))^{(k)}]\}$$

имеет главную часть $\Theta(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)]\ )$ *— коэффициент Фурье - Чебышева порядка* $n+1-k$ *функции* $\exp(x)$ *на отрезке* $[-1,1]\,.$

$$a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1]) \ = \ \Theta(\ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k_{[-1,1]}}\ )\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\exp(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^k 1_{[-1,1]}} \ = \ (1+\delta_{n-k}) \cdot a_{n+1-k}(\exp(x),[-1,1])\ ,$$

где $\quad |\delta_n| \le \beta_n/(1-\beta_{n+1}) = o(1)\ , \quad \{\ \beta_n\ ,\ n = 1,\ldots,13\ \} =$

$\{\ 0.24,\ 0.16,\ 0.12,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.042,\ 0.038,\ 0.032\ \}\,.$

Вывод 4. *В пространстве* $C^k_{[-1,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^k_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 1\ )\ ,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = -1\ )$$

преобразованием эквивалента этой задачи Коши в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (22) процедурой 1 входа (18)*

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

имеет главную часть $\Theta(\ C^k_n\ )$ *— отношение*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^k_n\ )\ .$$

Справедливо тождество $\| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1-k}(\exp(x), [-1,1]) \ =$

$$(1 + \delta_{n-k}) \ \cdot \ \| \exp(x) - y_n \|_{C^k_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^k_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ )\ .$$

12. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[-1,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y'' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\| \exp(x) - y_n\|_{C_{[-1,1]}}\}_{n=1}^{8}$$

$$= \{\ 0.72,\ 0.38,\ 0.082,\ 0.024,\ 0.00071,\ 0.00019,\ 2.9 \cdot 10^{-6},\ 7.4 \cdot 10^{-7}\ \}\,. \qquad (24)$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 2 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 5. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ a_{n+1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = \exp(-x) = solve(\ y'' + y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +}\ \ldots\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = A_n\,, \qquad \text{где}$$

$$\{\ A_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^{4} \ = \ \{\ 10,\ 44,\ 59,\ 67\ \}\ ,\quad \{\ A_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^{4} \ = \ \{\ 3,\ 15,\ 16,\ 15\ \}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^1_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y'' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\ \| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} = \| \exp(x)' - y_n' \|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=1}^{8} =$$

$$\{\ 1.7,\ 1.05,\ 0.12,\ 0.051,\ 0.014,\ 2.9 \cdot 10^{-4},\ 10^{-5},\ 1.3 \cdot 10^{-6}\ \}.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C^1_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ a_n(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^1_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^1_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$
$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^1_{[-1,1]}} / a_n(\exp(x), [-1,1]) = B_n\,, \qquad \text{где}$$

$$\{\ B_{2\cdot i}\ \}_{i=1}^4 \ = \ \{\ 4,\ 9,\ 6,\ 6\ \}\ ,\quad \{\ B_{2\cdot i-1}\ \}_{i=1}^4 \ = \ \{\ 1.5,\ 3,\ 3,\ 3\ \}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C^2_{[-1,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$$y = solve(\ y'' - y' - 1 + \exp(-x) \cdot y'' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ ) = \exp(x)$$

— решения задачи Коши для ЛДУМК (16), (17) — полиномом (22)

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает следующие значения

$$\{\ \|\exp(x) - y_n\|_{C^2_{[-1,1]}} = \|\exp(x)'' - y_n''\|_{C_{[-1,1]}}\ \}_{n=1}^{8} =$$

$$\{\ 2.7,\ 2.05,\ 0.4,\ 0.077,\ 0.0073,\ 0.00105,\ 5.9 \cdot 10^{-5},\ 5.2 \cdot 10^{-6}\ \}.$$

Полином (22) — результат преобразования APLAN - процедурой 1 входа (18). Вход (18) имеет APLAN - эквивалент задачи Коши (16), (17). Следовательно.

Из этого тождества, вывода 4 и тождества (20) следует утверждение.

Вывод 7. *В пространстве* $C^2_{[-1,1]}$ *главная часть*

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) \ = \ \Theta(\ C^2_n\ )$$

коэффициента оптимальности

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} \ / \ \max(\ E_{n,C^2_{[-1,1]}}[\exp(x)],\ E_{n,C^2_{[-1,1]}}[\exp(-x)]\ ) \ = \ C^2_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (16), (17) в ее решение

$$y(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$
$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

преобразованием (22) процедурой 1 входа (18) в полином

$$y_n = procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) + ...}\ (18)\ )$$

принимает значения

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C^2_{[-1,1]}} / a_{n-1}(\exp(x), [-1,1]) = 1 + \alpha_n\ ,$$

где $\quad \{\alpha_n\}_{n=2}^{8} = \{\ 0.8,\ 0.5,\ 0.7,\ 0.4,\ 0.9,\ 0.2,\ 0.6\ \}\,.$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[-1,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}$ *второй производной решения задачи Коши (16), (17)*

$$y''(x) = \exp(x) = solve(\ (\ y'' - y' - 1 + H \cdot y'' = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\ )\,,$$

$$H = solve(\ y'' - y' = 0\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 1\ )\ )$$

второй производной результата преобразования процедурой 1 входа (18)

$$y_n''(x) = (\ procedure_D_4(\ \texttt{D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) ...}\ (18)\ )''$$

(22) имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[-1,1]}$ *) приближения функции* $\exp(x)$ *алгебраическими полиномами порядка* $n-2$

$$\Theta(\ \| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-2}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}}\,.$$

Справедливо тождество

$$\| \exp(x) - y_n''(x) \|_{C_{[-1,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-1}} \| \exp(x) - (c_0 + \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2}) \|_{C_{[-1,1]}} \ / \ (1 + \delta_{n-2})\,.$$

Полиномы $y_n''\ ,\ n = 1, \dots, 12$ (22) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $\exp(x)$ в пространстве $C_{[-1,1]}$.

13. Сравнение процедуры 1 и интегрального метода [6]

Система задач Коши (16), (17) имеет аналог.

Задача Коши модельная для интегрального метода [6] (с. 47)

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

$$solve(\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,,\ \ u(0) = 1\,,\ \ u'(0) = -2\,,\ u = ?\ ) = \exp(-2 \cdot x)\,.$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно.

Из этих тождеств и тождества (24) следует утверждение.

Вывод 9. *Погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ , \quad x \in [0,1]$$

по интегральному методу с формулой трапеций [6] (с. 48),
где число узлов $q = 10$ *и* $q = 40$ *,*

$$q = 10 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2 \cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2 \cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

больше погрешности (24) решения системы задач Коши для ЛДУМК (16), (17) *APLAN - процедурой 1, где параметр* $n = 5$ *и* 6 *, соответственно.*

$$\| \exp(x) - y_6 \|_{C_{[-1,1]}} = 0.00019\ ,$$

$$\| \exp(x) - y_5 \|_{C_{[-1,1]}} = 0.00071\,.$$

Из этих тождеств, тождества (24) и классических оценок погрешности метода механических квадратур с формулой трапеций [6] следует утверждение.

Вывод 10. *Если число узлов* q *интегрального метода с формулой трапеций [6] (с. 48) растет, то погрешность решения задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

по этому методу [6] (с. 48) убывает как полином.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |\exp(-2 \cdot i/q) - u_h(i/q)| = O(1/q^2)\ .$$

Если параметр n *входа (18) APLAN - процедуры — порядок полинома (22)*

$y_n = procedure_D_4($ (`D_1 := dif(y , 2) + -1 * dif(y , 1) +`, ..., n) (18))

растет, то погрешность (24) решения задачи Коши (16), (17) APLAN - процедурой 1 убывает более быстро, чем полином.

$$\| \exp(x) - y_n \|_{C_{[-1,1]}} = o(p^n)\ , \qquad p \approx 0.1\ .$$

14. Сравнение APLAN - процедуры 1 и метода

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ]\,.$$

Согласно методу $P_q[u_h]$ задачу Коши $F[u] = 0$, в частности задачу Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

по интегральному методу [6] преобразуют в сеточную функцию

$$u_h \ = \ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ , \quad h = (b-a)/q\ ,$$

и интерполируют эту функцию алгебраическим полиномом порядка q .

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности метода $P_q[u_h]$ не меньше погрешности интегрального метода [6] (вычисления сеточного решения u_h).

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $u(x) = \exp(-2 \cdot x)$ — решения задачи Коши

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

на отрезке $[0,1]$ принимают значения

$$\{a_i(u,[0,1])\}_{i=0}^{15} = \{1.86,\ -1.66,\ 0.4,\ -0.065,\ 0.008,\ -0.0008,$$

$$6.6\cdot 10^{-5},\ -4.7\cdot 10^{-6},\ 2.9\cdot 10^{-7},\ -1.6\cdot 10^{-8},\ 8\cdot 10^{-10},$$

$$-3.7\cdot 10^{-11},\ 1.5\cdot 10^{-12},\ -5.9\cdot 10^{-14},\ 2.1\cdot 10^{-15},\ -2.2\cdot 10^{-17}\ \}\ .$$

Эти коэффициенты регулярно убывают (с ростом параметра i)

$$\{\ |a_{i+1}(u,[0,1])|\ /\ |a_i(u,[0,1])| = \gamma_i\ \}_{i=0}^{14} = \{\ 0.9,\ 0.25,\ 0.17,\ 0.13,$$

$$0.1,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.06,\ 0.055,\ 0.05,\ 0.045,\ 0.04,\ 0.038,\ 0.03,\ 0.01\ \}\ .$$

Погрешность решения этой задачи Коши по интегральному методу с формулой трапеций, где число узлов $q = 10$ и $q = 40$, [6] (с. 48) принимает значения

$$q = 10\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,10} |\exp(-2\cdot i/10) - u_h(i/10)| = 0.007\ ,$$

$$q = 40\ \rightarrow\ \max_{i=0,\ldots,40} |\exp(-2\cdot i/40) - u_h(i/40)| = 4.5\cdot 10^{-4}\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 11. *В пространстве* $C_{[0,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \ = \ C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши

$$(\ F[u] = 0\ ) = (\ u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\ )$$

в ее решение

$$u(x) = \exp(-2 \cdot x) = solve(\ (\ F[u] = 0\ )\ )$$

преобразованием этой задачи Коши в полином по методу $P_q[u_h]$

$$P_q[u_h] = P_q[\ method_[6](\ F[u] = 0\,,\ [0,1]\,,\ q\ )\ ]$$

имеет главную часть $\Theta(\ C_n\ )$. *Эта главная часть тождественна отношению*

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| \ = \ \Theta(\ \|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)]\ )\ .$$

Справедливо тождество

$$\|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ |a_{n+1}(u,[0,1])| = \|u - P_q[u_h]\|_{C_{[0,1]}} \ / \ E_{n,C_{[0,1]}}[u(x)] \cdot (1 + o(1))\ .$$

В случае $q = 10$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{10}[u_{h=1/10}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,10} | \exp(-2 \cdot i/10) - u_{h=1/10}(i/10) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$0.007 \ / \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \ \approx \ 760\ 000\ 000 \, .$$

В случае $q = 40$ *главная часть этого коэффициента не меньше*

$$\| \exp(-2 \cdot x) - P_{40}[y_{h=1/40}] \|_{C_{[0,1]}} \ / \ a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1]) \ \geq$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{41}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| =$$

$$\max_{i=0,\ldots,40} | \exp(-2 \cdot i/40) - u_{h=1/40}(i/40) | \ / \ |a_{11}(\exp(-2 \cdot x), [0,1])| / o(p^n) \ ,$$

где $p \leq 1/20$, *и, следовательно, она не меньше*

$$4.5 \cdot 10^{-4} \ / \ ((3.7/4) \cdot 10^{-11}) \cdot 20^{30} \ \approx \ 5 \cdot 10^{46} \ .$$

Из этих неравенств и выводов 5, 6 и 7 следует утверждение.

Вывод 12. *Метод* $P_q[u_h]$ *преобразования задачи Коши*

$$u'' + u' + u = 3 \cdot \exp(-2 \cdot x)\,, \quad u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -2\,, \quad x \in [0,1]$$

в алгебраический полином порядка q *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y] = 0\,, \quad solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ ) = y(x)\,, \quad x \in [a,b]\,, \quad y(x) \in X\,,$$

где пространство $X = C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots,$ *в полином порядка* n

$$y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ =\ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\,.$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности *в пространстве* X

$$\|y - y_n\|_X\ /\ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$

аппроксимации преобразования (функции) $y(x) = solve(\ F[y] = 0\ )\,,\ x \in [a,b]$ *преобразованием (полиномом)* $y_n = method(\ F[y] = 0\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,.$

15. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора

```
H_n := procedure_D_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

Выход оператора `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;`
— APLAN - эквивалент вида (14) ЛДУМК (12)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,.$$

Выход оператора

```
y_n := procedure_D_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n ) ;
```

— APLAN - эквивалент вида `h +···+ p * x ^ n` полинома

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\,.$$

16. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

```
D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n
```

имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда.

1. APLAN - процедура 1 — алгебраическое преобразование входа (13).

2. Для сложности преобразования APLAN - процедурой 1 входа (13) справедливо тождество

$$Q(\ \texttt{procedure_D_4(\ D_1\ ,\ init_cond_1\ ,\ i\ ,}$$

$$\texttt{LDUMK_2\ ,\ init_cond_2\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )} = O(1) +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(\ LDUMK_2\ ,\ init_cond_2\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )} +$$

$$Q(\ \texttt{procedure_D_1(\ LDUMK_1\ ,\ init_cond_1\ ,\ InitPoint\ ,\ interval\ ,\ n\ )\ )}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК ((4) или (12)), то преобразование процедурой `procedure_D_1` этого входа — алгебраическое.

Преобразование `LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * y = 0 ) ;` — алгебраическое.

APLAN - процедура 1 — линейная.

Сложность линейной процедуры тождественна сумме сложности её частей.

Сложность преобразования элементов `H_n` , `D_1` ЛДУМК (12) в это ЛДУМК не зависит от n .

$$Q(\ \texttt{LDUMK_1 := (D_1 + H_n * y = 0) ;}\ ) = O(1)\ .$$

Согласно теореме 3.1. Если вход APLAN - процедуры `procedure_D_1` имеет эквивалент задаче Коши для ЛДУМК (в частности, ЛДУМК(4) и ЛДУМК (12)), то сложность преобразования APLAN - процедурой $procedure_D_1$ этого входа

$$Q(\ procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ )\ ) =$$
$$O(n^3)\ + Q(\ canplf(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G)\ )\ +$$
$$Q(\ canplf(E_{m,p} \in L_2^{m \backslash p}(a, b; \rho) = ?)\ )\ .$$

17. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (13)*

`D_1, init_cond_1, LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n`

— APLAN - эквивалент входу алгоритма 1 (10)

$$\sim \quad (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

и имеет APLAN - эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 *порядка* k, *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда справедливо тождество

`procedure_D_4( D_1, init_cond_1, i,`

`LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n )` $=$

$$algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ).$$

Доказательство. Согласно теореме 1.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

Вход (13) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент входа алгоритма 1

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) \ .$$

Следовательно. APLAN - процедура 1 преобразует вход (13)
в APLAN - эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

18. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$. *Тогда:*

1. *Преобразование по алгоритму 1 (10) этого входа*

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

   алгебраическое.

2. *С ростом* n, *сложность преобразования (10) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0 \ , \ init_cond_1(y,d) \ ) ,$$

$$H(x) = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ y = ? \ )$$

порядка k, *рациональные константы и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует эквивалент входа алгоритма 1 в эквивалент полинома (10)

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

19. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1 (10)*

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ )$$

имеет эквивалент системе задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 *порядка* k *и* $n = p + k$, *где* $p \in N$.

Тогда результат преобразований этого входа по алгоритму 1 — полином (10)

$$y_n = algorithm_D_4(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ init_cond_1(y,d) \ , \ i \ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 \ , \ init_cond_2(y,d) \ , \ [a,b] \ , \ n \ ) =$$

$$(H_n = algorithm_D_1(A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0 , init_cond_2(y,d) , [a,b] , n) ,$$

$$(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 \ , \ H_n \ ) \ \rightarrow \ (A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0) ,$$

$$y_n = algorithm_D_1(A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0 , init_cond_1(y,d) , [a,b] , n))$$

существует тогда и только тогда, когда существует результат преобразования (5) по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — полином

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

и эти полиномы тождественны.

Доказательство. Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 — ЛДУМК.

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (11)

$$H_n = algorithm_D_1(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\, init_cond_2(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Следовательно.

Уравнение преобразования (5)

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0$$

тождественно ЛДУМК (12).

Следовательно.

Согласно лемме 3.3. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n = algorithm_D_1(\, A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,,\, init_cond_1(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)$$

и эти полиномы тождественны.

Согласно определению метода 1.

Полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

тождественен полиному (5)

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

Согласно определению алгоритма 1.

Полином

$$y_n = algorithm_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

тождественен полиному (10)

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ i\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ .$$

20. Класс $D_{4,X}$ систем задач Коши для ЛДУМК D_4

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к решению системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \;= 0\;,\quad u = ?\;)\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\;A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 \;+$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где $\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2,$$

— линейных интегральных уравнений с многочленными коэффициентами — результата эквивалентного преобразования системы задач Коши для ЛДУМК

$$y = solve(\;A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,\; y = ?\;)\,,$$

$$H = solve(\;A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\;,\; init_cond_2(y,d)\;,\; y = ?\;)$$

типа D_4 (3), (4) по методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\ V^k[u_p]\ ] + g_2\ ] = 0\ ,\ \ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\ ] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

где $p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\ \ \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0, 1, \ldots\ ,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho)\ \to\ L_2^p(a,b;\rho)$$

(9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84). Доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\,] = 0\,,$$
$$u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \textit{где}\quad p = n-k\,,$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *определяют класс* $D_{4,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК типа* D_4.

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,, \tag{25}$$

где

$$E_{p,X}[y^{(k)}] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n-k\ ,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *класса* $D_{3,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)$$

ЛИУМК (6) и решением этой системы ЛИУМК по методу (7), (8)

$$H^{(k)}_n = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L^p_2(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)}_n = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 + (V^k[H^{(k)}_n] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P^{(i)}_{1,k-1})\,] = 0\,,$$

$$u_p \in L^p_2(a,b;\rho) = ?\,)\,,\quad \text{где}\quad p = n - k\,.$$

Классы $D_{4,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{4,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_4 *представительны.*

21. Эквивалентность метода 1 и проекционного метода 1

Теорема 5. *Метод 1*

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

(5) решения системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,.$$

есть алгебраический эквивалент композиции преобразований:

1. *Преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему ЛИУМК (6)*

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 +$$
$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,.$$

2. Решения системы ЛИУМК (6) проекционному методу (7), (8)

$$H^{(k)}_n = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L^p_2(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)}_n = solve(\,S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1 +$$
$$(V^k[H^{(k)}_n] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P^{(i)}_{1,k-1})\,] = 0\,,\quad u_p \in L^p_2(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L^p_2(a,b;\rho) = ?) \ = \ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Справедливы следующие утверждения.

1. Преобразование системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,.$$

по методу 1

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

(5) — *алгебраическое.*

2. Алгебраические полиномы (5)

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

— результаты преобразования по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4)

$$y(x) = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,.$$

существуют тогда и только тогда, когда существуют полиномы (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\ ] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0, 1, \ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

— результаты преобразования по проекционному методу 1 системы ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \ = 0\ ,\ \ u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\ \ u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\ \ i = 1, 2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\ \ i = 1, 2\,,$$

— преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) — и справедливы тождества

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,,\qquad H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.

Преобразование (5) системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 по методу 1 тождественно преобразованию (10) по алгоритму 1 эквивалента этой системе задач Коши

$$y_n = algorithm_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ i\ ,$$

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n .$$

Согласно теореме 3.

Преобразование по алгоритму 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 — алгебраическое.

Следовательно.

Преобразование по методу 1 системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 — алгебраическое.

Уравнение

$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0$$

системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 — ЛДУМК.

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_2 = G_2 + D_2[P_{2,k-1}]\,,$$

$$P_{2,k-1} = Y_{2,0} + Y_{2,1}\cdot(x-d) + \cdots + Y_{2,k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\,,$$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(7) и для этих полиномов справедливо тождество

$$H_n = V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}\,.$$

Следовательно. Уравнения

$$A_1\cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n\cdot y^{(i)} = 0$$

преобразований (5) и (8) тождественны.

Для систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 это уравнение — ЛДУМК (12).

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

преобразования (5) существует тогда и только тогда, когда существует полином

$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_1 \cdot u_p + D_1[\ V^k[u_p]\ ] + g_1 +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\ ] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$\text{где}\quad p = n-k\,,\quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_1 = G_1 + D_1[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{1,k-1} = Y_{1,0} + Y_{1,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{1,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?)\ =\ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$

(8) и для этих полиномов справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\,.$$

22. Эффективность метода 1

Следствие 1. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *тождественны коэффициенты оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) порядка k *типа* D_4 *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\,)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$

$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )$$

и дифференцированием полинома y_n
и преобразованием этой системы задач Коши в ЛИУМК (6)

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\, V^k[u]\,] + g_2\ = 0\ ,\quad u = ?\ )\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\ A_1 \cdot u + D_1[\, V^k[u]\,] + g_1\ +$$

$$(V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\quad u = ?\,)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,,$$

и решением этой системы ЛИУМК по проекционному методу (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\, V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $\quad p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) \;=\; a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\;, \quad \{a_0, \ldots, a_p\} = ?\,,$$

$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\; i = 0, 1, \ldots\,,\; z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 5.

Для результатов преобразования (5) системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в полиномы

$$y_n = method_D_2(\; A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y = 0\;,\; init_cond_1(y,d)\;,$$

$$H = solve(\, A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\; init_cond_2(y,d)\,,\; y = ?\,)\,,\; [a,b]\,,\; n\;)$$

и результатов преобразования (6) — (8) системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) в систему ЛИУМК (6) и полиномы (7), (8)

$$H_n^{(k)} = solve(\; S_p[\; A_2 \cdot u_p + D_2[\, V^k[u_p]\,] + g_2\;] = 0\;, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\;)\,,$$

$$y_n^{(k)} = solve(\, S_p[\, A_1 \cdot u_p + D_1[\, V^k[u_p]\,] + g_1 \, +$$

$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u_p] + P_{1,k-1}^{(i)})\,] = 0\,, \quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)$$

справедливо тождество

$$y_n = V^k[y_n^{(k)}] + P_{1,k-1}\ .$$

Согласно определения системы ЛИУМК (6), решения $y(x)\,,\ H(x)$ системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) являются преобразованиями

$$y = V^k[y^{(k)}] + P_{1,k-1}\,, \quad H = V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}$$

решений $y^{(k)}(x)\,,\ H^{(k)}(x)$ системы ЛИУМК (6).

Следовательно. Тождественны результаты тождественных преобразований этих функций и полиномов — коэффициенты оптимальности (25)

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,.$$

23. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 13 доказывают следующее утверждение.

Вывод 14. *В пространстве* $X = C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \ldots$ *функций* $y(x)\ ,\ x \in [a,b]$ *ограничен коэффициент оптимальности (25)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X / \max(\ E_{p,X}[y^{(k)}],\ E_{p,X}[H^{(k)}]\ )\,,$$

где

$$E_{p,X}[y] = \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X\ ,\quad p = n - k\,,$$

аппроксимации преобразования системы задач Коши для ЛДУМК порядка k *(3), (4) типа* D_4 *класса* $D_{4,X}$ *в производную порядка* k *ее решения*

$$y = solve(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ y = ?\ )\,,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

преобразованием (5) этой системы по методу 1

$$y_n = method_D_4(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = method_D_1(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,$$
$$init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ \ )$$

и дифференцированием полинома y_n.

Класс $D_{4,X}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_4 *определяет проекционный метод (7), (8)*

$$H_n^{(k)} = solve(\ S_p[\ A_2 \cdot u_p + D_2[\,V^k[u_p]\,] + g_2\ ] = 0\ ,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$
$$y_n^{(k)} = solve(\ S_p[\,A_1 \cdot u_p + D_1[\,V^k[u_p]\,] + g_1\ +$$
$$(V^k[H_n^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P_{1,k-1}^{(i)})\,] = 0\,,\quad u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,)\,,$$

где $p = n - k\,,$

$$(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) \ = \ a_0 \cdot T_0(z) + \cdots + a_p \cdot T_p(z)\ ,\quad \{a_0,\ldots,a_p\} = ?\,,$$
$$T_i(z) = \cos(i \cdot \arccos(z))\,,\ i = 0,1,\ldots\,,\ z = 2 \cdot (x-a)/(b-a) - 1\,,$$

решения преобразования этой системы задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа D_4 *— системы ЛИУМК (6)*

$$H^{(k)} = solve(A_2 \cdot u + D_2[\,V^k[u]\,] + g_2 \;= 0\;,\quad u = ?\;)\,,$$

$$y^{(k)} = solve(\;A_1 \cdot u + D_1[\,V^k[u]\,] + g_1 + (V^k[H^{(k)}] + P_{2,k-1}) \cdot (V^{k-i}[u] + P^{(i)}_{1,k-1}) = 0\,,\;\; u = ?\;)\,,$$

где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,,\quad g_i = G_i + D_i[P_{i,k-1}]\,,\quad i = 1,2\,,$$

$$P_{i,k-1} = Y_{i,0} + Y_{i,1} \cdot (x-d) + \cdots + Y_{i,k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,\quad i = 1,2\,.$$

Классы $D_{4,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{4,C_{[a,b]}}$ *систем задач Коши для ЛДУМК (3), (4) типа* D_4 *представительны.*

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (9) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 14.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 15. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают системы задач Коши для ЛДУМК порядка k (3), (4) типа D_4*

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\quad \text{где}$$

$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ y = ?\ )$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования.

Дополнение

Метод 1'. Модификация метода 1.

$$y_n = method_D_4'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,$$
$$H = solve(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ y = ?\ )\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$
$$(\ H_n = method_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$
$$y_n = method_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ )\,.$$

Метод $method_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1.

$$y_n = algorithm_D_4'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ init_cond_1(y,d)\ ,\ i\ ,$$
$$A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\ ,\ init_cond_2(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ) =$$
$$(\ H_n = algorithm_D_1'(\ A_2 \cdot y^{(k)} + D_2[y] + G_2 = 0\,,\ init_cond_2(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\,,$$
$$(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1\ ,\ i\ ,\ H_n\ )\ \rightarrow\ (\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,)\,,$$
$$y_n = algorithm_D_1'(\ A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H_n \cdot y^{(i)} = 0\,,\ init_cond_1(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\,)\ )\,.$$

Алгоритм $algorithm_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

APLAN - процедура 1'. Модификация APLAN - процедуры 1.

```
H_n := procedure_D‘_1( LDUMK_2, init_cond_2, InitPoint, interval, n );

  LDUMK_1 := ( D_1 + H_n * dif(y,i) = 0 ) ;

y_n := procedure_D‘_1( LDUMK_1, init_cond_1, InitPoint, interval, n );
```

APLAN - процедура `procedure_D‘_1` рассмотрена в лекции 3.

Распространение метода 1, алгоритма 1 и процедуры 1 на уравнения

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 + H \cdot y^{(i)} = 0 \ , \ init_cond_1(y, d) \ ,$$

где

$$A_1 \cdot y^{(k)} + D_1[y] + G_1 = 0$$

— ЛДУМК типа D_1 и

H — композиция решений нескольких задач Коши для ЛДУМК типа D_1, строится и исследуется по приведенной выше схеме.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.
2. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.
3. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.
5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.
6. Верлань А. Ф. и Сизиков В. С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* — Киев: Наукова думка. — 1986. — 544 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 7

Программа для решения задачи Коши для ЛДУМК с нелинейностью — полиномом

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_5(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, \ldots, y^{(k-1)}) = 0\ , \qquad (1)$$

$$init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )\ =\ \ c_0 + c_1\cdot x + \cdots + c_n\cdot x^n\ . \qquad (2)$$

Эта процедура преобразует в полином (2) задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами (ЛДУМК) дополненного нелинейностью — полиномом — систему уравнений:

— ЛДУМК дополненное нелинейностью — полиномом

$$(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\ )\ = \qquad (3)$$

$$(\ A\cdot y^{(k)} + B\cdot y^{(k-1)} + \cdots + C\cdot y + G + D_{1,2}\cdot y^2 + \cdots + D_{1,s}\cdot y^s +$$

$$D_{2,2}\cdot y'^2 + \cdots + D_{2,s}\cdot y'^s + \cdots + D_{k,2}\cdot (y^{(k-1)})^2 + \cdots + D_{k,s}\cdot (y^{(k-1)})^s = 0\,)\,,$$

где $A,\ B, \ldots, C,\ D_{i,j},\ i = 1, \ldots, k,\ j = 2, \ldots, s\,,$ *— полиномы,*

— начальные условия

$$init_cond(y, d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,, \ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \}\,. \qquad (4)$$

2. Метод 1 — выполняет преобразование (1), (2)

$$y_n = method_D_5(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,, \tag{5}$$

где $$y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \cdots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)!\,, \tag{6}$$

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,, \tag{7}$$

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,, \qquad s = 1,\ 2, \ldots\,. \tag{8}$$

Метод $method_D_1$ — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2] лекции 3. Эта алгоритмизация основана на a - методе [3] и имеет (3.5) уравнение

$$y_{n,s} = solve(\ \ init_cond(y_n \in P_n = ?\,,\ d)\ \ ,$$

$$A\cdot(y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + f_s + (E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )\,. \tag{9}$$

Неизвестные уравнения (9) — (символьные) коэффициенты полиномов

$$(y_n \in P_n = ?) = c_0 + c_1\cdot x + \cdots + c_n\cdot x^n\,,\ \{c_0, \ldots, c_n\} \in Atom\,,\ \{c_0, \ldots, c_n\} = ?\,, \tag{10}$$

$$(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ = \tau_1\cdot T_{m-p+1}(z) + \cdots + \tau_{m-p}\cdot T_m(z)\,,\ \{\tau_i\}_{i=1}^{m-p} = ?\,. \tag{11}$$

3. Интегральный эквивалент для задачи Коши (3), (4)

Начальные условия (4) определяют подстановку $y = V^k[u] + P_{k-1}$, где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Эта подстановка преобразует дифференциальное уравнение (3) в интегральное уравнение

$$subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\,)\,) \ =$$

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,, \qquad (12)$$

где $g = G + D[P_{k-1}]$.

Уравнение (12) — ЛИУМК (линейное интегральное уравнение с многочленными коэффициентами) Вольтерра дополненное нелинейностью — полиномом.

Уравнение (12) имеет решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $y(x)$ задача Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$y(x) = V^k[u(x)] + P_{k-1}\,, \quad u(x) = y^{(k)}(x)\,. \qquad (13)$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$u_p = G_method_I_5(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\ldots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}\,, \quad (14)$$

где $u_{p,0} = 0$ и для $s = 1, 2, \ldots$

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A\cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + f_s\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,, \quad (15)$$

$$\text{где}\quad f_s = f(\,x,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1}),\ldots,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1})^{(k-1)}\,)\,, \quad (16)$$

$$(\ A\cdot u + D[V^k[\,u\,]] + g + f_s = 0\ ) = subs(\,y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\,A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,)\,)\,. \quad (17)$$

Оператор S_p (15) преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b])\cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b])\cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,, \quad (18)$$

$$\text{где}\qquad T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\quad z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,.$$

Неизвестные уравнения (15) — (символьные) коэффициенты полинома

$$(\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ ) = a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\,,\ \{a_0,\ldots,a_p\} \in Atom\,. \quad (19)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачу Коши для ЛДУМК дополненных нелинейностью — полиномом (3), (4) применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши (3), (4) в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (15) в пространстве $C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots$ определяют аппроксимационные характеристики оператора S_p (18).

$$A = 1 \ \rightarrow\ \|u_s - u_{p,s}\|_X = (1 + o(1)) \cdot \|u_s - S_p[u_s]\|_X\,,\ \ X = C_{[a,b]} \ \vee L_2(a,b;\rho)\,. \quad (20)$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгоритм 1 — выполняет преобразование (7) – (9)

$$y_{n,s} = algorithm_D_5(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,$$
$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,. \qquad (21)$$

1. Преобразовать полиномы $f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})$ и $y_{n,s-1}$ (21) в полином (8)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,.$$

2. Преобразовать оператор $A\cdot y^{(k)} + D[y] + G$ (21) и полином f_s (8) в ЛДУМК преобразования (7) метода 1

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,. \qquad (22)$$

3. Выполнить преобразование (7) — по алгоритму 3.1 преобразовать ЛДУМК (22) и часть входа (21) $init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n$ в искомый полином (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,. \qquad (23)$$

7. Вход алгоритма 1 для APLAN - процедуры 1

$$\texttt{(DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n)} \qquad (24)$$

$$\sim \quad (A\cdot y^{(k)}+D[y]+G\,,\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ).$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

```
NAME  DO ;
```

```
DO := A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1)  + ··· +  C * y + G ;   (25)
```

— APLAN - эквивалент для дифференциального оператора уравнения (3)

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G =$$

$$A(x)\cdot y^{(k)}(x) + B(x)\cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x)\cdot y(x) + G(x)\,.$$

```
NAME  f ;       f := D1 * y + ... + D2 * y1 + ... + Dks * yk ^ s; .
```

— Терм атомов `x, y, y1,...` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^ ,`

— APLAN - эквивалент для полинома уравнения (3)

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)}) = D_{1,2}\cdot y^2 + \cdots + D_{1,s}\cdot y^s +$$

$$D_{2,2} \cdot y'^2 + \cdots + D_{2,s} \cdot y'^s + \cdots + D_{k,2} \cdot (y^{(k-1)})^2 + \cdots + D_{k,s} \cdot (y^{(k-1)})^s \, .$$

Начальная точка `InitPoint := d ;` и **условия** `init_cond :=`

`( y = Y_0 , dif(y , 1) = Y_1 , ... , dif(y , k-1) = Y_k-1 ) ;` (26)

— APLAN - эквивалент для начальных условий (4)

$$init_cond(y, d) \; = \; \{ \; y(d) = Y_0 \, , \; y'(d) = Y_1 \, , \ldots , \; y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1} \; \} \, .$$

`y_n := h + ... + q * x^n` $\sim$ $y_{n,s-1}$. Приближение к решению.

`interval := (a, b)` $\sim$ $[a, b]$. Отрезок аппроксимации.

`n` $\sim$ $n \in N$. Порядок полинома $y_{n,s}$ (21).

Составляющие оператора (25), полинома f **и условий (26).**

Атомы `x , y , y1 , ... , yk`

— APLAN - эквивалент для аргумента x , искомой функции y и ее производных.

`NAME A , B , ... , C , G , D11 , ... , Dks`

— Термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^` — APLAN - эквивалент для полиномов $A(x)$, $B(x) \, , \ldots , \; C(x)$, $G(x)$, $D_{1,2}(x) \, , \ldots , \; D_{k,s}(x)$.

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_5$

```
  y1_n := d_x( y_n ) ;                              /*  y'_n  */

  y2_n := d_x( y1_n ) ;                            /*  y''_n  */

                                ...

  yk_n := d_x( yl_n ) ;                           /*  y^(k)_n  */

  f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;

  LDUMK := ( DO + f_s = 0 ) ;

y_n := procedure_D_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);
```

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5 \ , \quad x \in [0.5, 1] \ . \qquad (27)$$

Задача Коши (27) — модельная для методов Рунге - Кутта [6] (с. 106).

Описание на языке APLAN входа (24) для задачи Коши (27).

```
   process[1] := (
                          DO := dif(y , 1) + 1.5 * y ;
f := (-1 * (x + 3)) * y ^ 2 + (-1 * x * (x + 2)) * y ^ 3 + -3/2 * y;
                        y_n := -1.5 ;
                  InitPoint := 0.5 ;
                  init_cond := ( y = -1.6 ) ;
                   interval := (0.5 , 1) ;
                  ... );                                          (28)
```

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (28)

$$n = 1\,, \quad y_{n,0} = -1.6\,.$$

```
f := (-1 * (x + 3)) * y ^ 2 + (-1 * x * (x + 2)) * y ^ 3 + -1.5 * y;
```

```
    LDUMK =                          ( dif(y , 1) + 3/2 * y +
(-1 * (x + 3)) * y ^ 2 + (-1 * x * (x + 2)) * y ^ 3 + -1.5 * y;

   y_n =                          0.744727 * x + -1.97236 ;

   y_n =                           1.59471 * x + -2.39735 ;

   y_n =                           1.98548 * x + -2.59274 ;
                                ...
   y_n =                           2.03575 * x + -2.6188 ;
```

11. Результаты преобразования в классическом виде

$$f_1 = subs(y = y_{n,0}, f) = -64/25 \cdot (x+3) + 512/125 \cdot x \cdot (x+2) + 12/5\,,$$

$$LDUMK = (y' + 3/2 \cdot y - 64/25 \cdot (x+3) + 512/125 \cdot x \cdot (x+2) + 12/5 = 0)\,,$$

$$y_{n,1} = 0.744727 \cdot x - 1.97236\,,$$

$$y_{n,2} = 1.59471 \cdot x - 2.39735\,,$$

$$y_{n,3} = 1.98548 \cdot x - 2.59274\,.$$

$$\ldots$$

$$y_{n,s} = 2.03575 \cdot x - 2.6188\,.$$

12. Наилучшее приближение решения задачи Коши (27)

$$y(x) = 1/(x+2) - 1/x =$$

$$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ) = -2/(x \cdot (x+2))\,. \quad (29)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y = 1/(x+2) - 1/x$ (29) на отрезке $[0.5, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_n(y,[0.5,1])\}_{n=0}^{16} = \{-1,\ 0.45,\ -0.08,\ 0.014,\ -0.002,\ 0.0004,$$

$$-7.2 \cdot 10^{-5},\ 1.2 \cdot 10^{-5},\ -2.1 \cdot 10^{-6},\ 3.6 \cdot 10^{-7},\ -6.2 \cdot 10^{-8},\ 10^{-8},$$

$$-1.8 \cdot 10^{-9},\ 3.1 \cdot 10^{-10},\ -5.4 \cdot 10^{-11},\ 9.3 \cdot 10^{-12},\ -1.6 \cdot 10^{-12}\}\ . \quad (30)$$

Функция $y(x) = 1/(x+2) - 1/x = -2/(x \cdot (x+2))$ (29) — аналитическая в комплексной плоскости, имеет полюсы в точках 0 , -2 и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (с ростом параметра n) регулярно убывают к нулю

$$\{\ |a_{n+1}(y,[0.5,1])|/|a_n(y,[0.5,1])| = \gamma_n\ \}_{n=0}^{15} = \{0.45,\ 0.18,\ 0.18, \ldots, 0.18\}\ .$$

Норма полинома Чебышева тождественна 1 .

$$\|\cos(i\cdot\arccos(4\cdot x-3))\|_{C_{[0.5,1]}}=\|\cos(i\cdot\arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}}=\|\cos(i\cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}}=1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 1. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y=1/(x+2)-1/x$ *(29) алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}}\ =\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\ )$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка $n+1$ *функции* $y(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5,1]$.

$$\Theta(\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\ )=|a_{n+1}(y,[0.5,1])|\ .$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}}=(1+\beta_n)\cdot|a_{n+1}(y,[0.5,1])|\ , \qquad (31)$$

$$\text{где}\ \ |\beta_n|\le\beta\approx 0.2\,,\qquad |a_n(y,[0.5,1])|\approx Const\cdot 0.18^n\ .$$

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \;=\; C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$solve(\; y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \,,\; y(0.5) = -8/5 \;) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_6(\; D = y' \,,\; f = -1 * \ldots \,,\; [0.5, 1] \,,\; n \;) \qquad (32)$$

имеет главную часть — отношение $\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y, [0,5,1])| = \Theta(\; C_n \;)$ *,*
где $a_{n+1}(y, [0.5, 1])$ *— коэффициент*
Фурье - Чебышева порядка $n+1$ *функции* $y(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5, 1]$ *.*

Справедливо тождество

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y, [0,5,1])| \;=\; (1 + \beta_n) \cdot \|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \,,$$

$$\text{где } \; |\beta_n| \le \beta \approx 0.2 \,, \qquad |a_n(y, [0.5, 1])| \approx Const \cdot 0.18^n \,.$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ на отрезке $[0.5, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_n(y', [0.5, 1])\}_{n=0}^{20} = \{2,\ -1.4,\ 0.36,\ -0.08,\ 0.018,\ -0.0036,\ 0.00072,$$

$$-0.00014,\ 2.7 \cdot 10^{-5},\ -5.2 \cdot 10^{-6},\ 10^{-6},\ -1.8 \cdot 10^{-7},\ 3.4 \cdot 10^{-8},\ -6.3 \cdot 10^{-9},$$

$$1.2 \cdot 10^{-9},\ -2.1 \cdot 10^{-10},\ 3.8 \cdot 10^{-11},\ -7 \cdot 10^{-12},\ 1.3 \cdot 10^{-12},\ -2.3 \cdot 10^{-13},\ 4 \cdot 10^{-14}\}\ .$$

Функция $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ — аналитическая в комплексной плоскости, имеет полюсы в точках 0 , -2 и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (с ростом параметра n) регулярно убывают к нулю

$$\{\ |a_{n+1}(y', [0.5, 1])|/|a_n(y', [0.5, 1])| = \gamma_n\ \}_{n=0}^{15} = \{0.7,\ 0.25,\ 0.23, \ldots, 0.18\}\ .$$

Норма полинома Чебышева тождественна 1 .

$$\|\cos(i \cdot \arccos(4 \cdot x - 3))\|_{C_{[0.5,1]}} = \|\cos(i \cdot \arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i \cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\ .$$

Из этих тождеств следует утверждение.

Вывод 3. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ *алгебраическими полиномами порядка* $n-1$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)'\|_{C_{[0.5,1]}} \;=\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\;)$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *на отрезке* $[0.5,1]$.

$$\Theta(\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\;) = |a_n(y',[0.5,1])|\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)'\|_{C_{[0.5,1]}} = (1+\delta_n)\cdot|a_n(y',[0.5,1])|\;,$$

где $$|\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y',[0.5,1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$$

Для коэффициентов Фурье - Чебышева на отрезке $[0.5,1]$ (30) функции $y = 1/(x+2) - 1/x$ (29) и ее производной $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ справедливы неравенства

$$|a_n(y',[0.5,1])| > |a_n(y,[0.5,1])| > |a_{n+1}(y,[0.5,1])| \quad n = 0,1,\ldots\,.$$

Из выводов 1, 2 и 3 и этого неравенства следуют утверждения.

Вывод 4. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y = 1/(x+2) - 1/x$ *(29) алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;=\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)] =$$

$$\max\{E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)],\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\}$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\;)$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *на отрезке* $[0.5, 1]$.

$$\Theta(\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\;) = |a_n(y', [0.5, 1])|\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_{C^1_{[0.5,1]}} = (1 + \delta_n) \cdot |a_n(y', [0.5, 1])|\;,$$

где $\qquad |\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y', [0.5, 1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$

Вывод 5. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)] \;=\; C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$solve(\; y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3 + (x+3)\cdot y^2\,,\; y(0.5) = -8/5\;) = y(x) = -2/(x\cdot(x+2))$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_6(\; D = y'\,,\; f = -1 * \ldots\,,\; [0.5,1]\,,\; n\;)$$

имеет главную часть — отношение $\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; |a_n(y',[0,5,1])| = \Theta(\; C^1_n\;)$ *,*
где $a_n(y',[0.5,1])$ *— коэффициент*
Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5,1]$*.*

Справедливо тождество

$$\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; |a_n(y',[0,5,1])| \;=\; (1+\delta_n)\cdot\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\,,$$

$$\text{где}\;\; |\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y',[0.5,1])| \approx Const\cdot 0.18^n\,.$$

13. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[0.5,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

(29) (решения задачи Коши для ЛДУМК (27)) полиномом (32)

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1 * \ldots\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5, 1]\ ,\ n\ )$

(результатом преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3} = \{0.136,\ 0.059,\ 0.009\}\ .$$

Из вывода 2 и этих тождеств следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *главная часть*

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ |a_{n+1}(y,[0.5,1])|$$

коэффициента оптимальности

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \ y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \ \|_{C_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

преобразованием процедурой 1 входа (28)

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\,,\ f = -1{*}\ldots\,,\ y_{n,0} = -8/5\,,\ y(1/2) = -8/5\,,\ [0.5,1]\,,\ n\ )$

принимает значения

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_{n+1}(y,[0.5,1])| = Const + \alpha_n\ , \qquad \text{где}$$

$$\{Const + \alpha_n\ \}_{n=1}^{3} \ = \ \{\ 1.7\ ,\ 4.2\ ,\ 4.5\ \}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C_{[0.5,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$(solve(\ y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3+(x+3)\cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ))' = y'(x) = (-2/(x\cdot(x+2)))'$

(производной решения (29) задачи Коши для ЛДУМК (27)) производной полинома

$y'_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1{*}\ldots\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5,1]\ ,\ n\ )'$

(32) (производной результата преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\|y' - y'_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3} = \{\ 1.5,\ 0.44,\ 0.09\ \}.$$

Из этих тождеств и тождеств

$$\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3} = \{\ 0.136,\ 0.059,\ 0.009\ \}$$

следует тождество

$$\{\|y - y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3} = \{\|y' - y'_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3}.$$

Из вывода 5 и этих тождеств следует утверждение.

Вывод 7. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *главная часть*

$$\| y - y_n \|_{C^1_{[0.5,1]}} \ / \ |a_n(y', [0.5, 1])|$$

коэффициента оптимальности

$$\| y - y_n \|_{C^1_{[0.5,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\dots,c_n} \| \ y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n) \ \|_{C^1_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

(29) преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)

$y_n = procedure_D_6(\ D = y' \,,\ f = -1 * \dots \,,\ y_{n,0} = -8/5 \,,\ y(1/2) = -8/5 \,,\ [0.5, 1] \,,\ n\ )$

принимает значения

$$\| y - y_n \|_{C^1_{[0.5,1]}} / |a_n(y', [0.5, 1])| = 1 + \alpha_n \ , \qquad \text{где}$$

$$\{ 1 + \alpha_n \}_{n=1}^{3} \ = \ \{ \ 1.05 \ , \ 1.2 \ , \ 1.1 \ \} \ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}}$ *производной решения (29) задачи Коши (27)*

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ )' = y'(x) = (-2/(x \cdot (x+2)))'$

производной результата преобразования (32) процедурой 1 входа (28) (содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27))

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1 * ...\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5, 1]\ ,\ n\ )$

имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[0.5,1]}$ *) приближения функции* $y'(x)$ *(29) алгебраическими полиномами порядка* $n-1$

$$\Theta(\ \|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-1}} \|y'(x) - (c_0 + \dots + c_{n-1} \cdot x^{n-1})\|_{C_{[0.5,1]}}\ .$$

Справедливо тождество

$$\|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\dots,c_{n-1}} \|y'(x) - (c_0 + \dots + c_{n-1} \cdot x^{n-1})\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ (1 + \delta_n)\ .$$

Полиномы $y'_n\ ,\ n = 1, \dots, 12$ (32) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $y'(x)$ (29) в пространстве $C_{[0.5,1]}$.

14. Сравнение процедуры 1 и метода Рунге - Кутта [6]

Погрешность решения задачи Коши (27)

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5$$

по стандартной формуле метода Рунге - Кутта [6], где число узлов $q = 5$ и $q = 50$, [6] (с. 105) принимает значения

$$q = 50 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,50} |y(0.5 + i/100) - y_h(0.5 + i/100)| = 4 \cdot 10^{-9} \ ,$$

$$q = 5 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,5} |y(0.5 + i/10) - y_h(0.5 + i/10)| = 4 \cdot 10^{-5} \ .$$

Следовательно. Из этих тождеств, погрешности решения этой задачи Коши APLAN - процедурой 1

$$\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{3} = \{ \ 0.136, \ 0.059, \ 0.009 \ \} ,$$

вывода 7 и классических оценок погрешности метода Рунге - Кутта [6] следует утверждение.

Вывод 9. *Если число узлов* q *метода Рунге - Кутта [6] (с. 105) растет, то погрешность решения задачи Коши (27)*

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5$$

по этому методу [6] (с. 107) убывает как полином.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |y(0.5 + i/(2 \cdot q)) - y_h(0.5 + i/(2 \cdot q))| = O(1/q^4) \ .$$

Если параметр n *входа (28) APLAN - процедуры 1 — порядок полинома (32)*

$$y_n = procedure_D_6(\ (\ \texttt{D_1 := dif(y , 1); } \ldots, \ n\ )\ (28)\ )$$

растет, то погрешность решения задачи Коши (27) APLAN - процедурой 1 убывает более быстро, чем полином.

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \approx Const \cdot 0.18^n \ .$$

15. Сравнение APLAN - процедуры 1 и метода

$$P_q[y_h] = P_q[\ method_[6](\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ]\,.$$

Согласно методу $P_q[y_h]$ задачу Коши $F[y] = 0$, в частности задачу Коши (27), по сеточному методу [6] преобразуют в сеточную функцию

$$y_h\ =\ method_[6](\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ,\quad h = (b-a)/q\ ,$$

и интерполируют эту функцию алгебраическим полиномом порядка q .

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности метода $P_q[y_h]$ не меньше погрешности сеточного метода [6] (вычисления сеточного решения y_h).

Погрешность решения задачи Коши (27)

$$(\ F[y] = 0\ )\ =\ (\ y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3 + (x+3)\cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ )$$

по стандартной формуле метода Рунге - Кутта принимает значения [6] (с. 105)

$$q = 50\ \to\ \max_{i=0,\dots,50} |y(0.5+i/100) - y_h(0.5+i/100)| = 4\cdot 10^{-9}\ ,$$

$$q = 5\ \to\ \max_{i=0,\dots,5} |y(0.5+i/10) - y_h(0.5+i/10)| = 4\cdot 10^{-5}\ .$$

Из этих тождеств, вывода 2 и тождеств (30) следует утверждение.

Вывод 10. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ $\|y - P_n[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y,[0.5,1])|$ *— главная часть коэффициента оптимальности*

$$\|y - P_n[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \; y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \; \|_{C_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$$solve(\; F[y] = 0 \;) \;=\; y(x) = -2/(x \cdot (x+2)) \;=$$

$$solve(\; y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \,,\; y(0.5) = -8/5 \;)$$

преобразованием задачи Коши (27) по методу

$$P_n[y_h] = P_n[\; method_[6](\; F[y] = 0 \,,\; [a,b] \,,\; n \;) \;] \,.$$

принимает значения

$$\|y - P_5[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_6(y,[0.5,1])| \geq 4 \cdot 10^{-5} \;\; / \;\; 7.2 \cdot 10^{-5} \;\approx\; 0.5 \,,$$

$$\|y - P_{50}[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_{51}(y,[0.5,1])| \geq 4 \cdot 10^{-9} \;\; / \; (\; 10^{-8} \cdot 0.18^{40} \;) \;\approx\; 0.4 \cdot 5^{40} \approx \; 4 \cdot 10^{30} \,.$$

Из этих тождеств и выводов 6, 7 следует утверждение.

Вывод 11. *Метод* $P_q[u_h]$ *преобразования задачи Коши (27)*

$$(F[y] = 0) = (y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 , \quad y(0.5) = -8/5)$$

в алгебраический полином порядка q *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y] = 0 , \quad solve(F[y] = 0 , y = ?) = y(x) , \quad x \in [a,b] , \quad y(x) \in X ,$$

где пространство $X = C_{[a,b]}, L_2(a,b;\rho), \ldots ,$ *в алгебраический полином*

$$y_n = method(F[y] = 0 , [a,b] , n) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n .$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности в пространстве X

$$\|y - y_n\|_X \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$ *аппроксимации*

преобразования (функции) $y(x) = solve(F[y] = 0 , y = ?) , x \in [a,b]$

преобразованием (полиномом) $y_n = method(F[y] = 0 , [a,b] , n) .$

16. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора

```
y1_n := d_x( y_n ) ;  —  q * n * x ^ (n -1) + ···
```

— APLAN - эквивалент для полинома $y'_{n,s-1} = c_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \cdots$.

Выход оператора

```
y2_n := d_x( y1_n ) ;  —  q * n * ( n -1 ) * x ^ (n - 2) + ···
```

— APLAN - эквивалент для полинома $y''_{n,s-1} = c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \cdots$.

Выход оператора

```
f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;
```

— APLAN - эквивалент для полинома (8)

$$f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}) \ .$$

Выход оператора `LDUMK := ( DO + f_s = 0 ) ;` — ЛДУМК

`A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1) + ··· + C * y + G + f_s = 0 ;`

— APLAN - эквивалент для ЛДУМК (22)

$$A(x)\cdot y^{(k)}(x) + B(x)\cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x)\cdot y(x) + G(x) + f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}) = 0\,.$$

Выход оператора

`y_n := procedure_D_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);`

— полином

`c( n ) * x ^ n +···+ c( 1 ) * x + c( 0 ) ,`

где `x` — атом и коэффициенты `c( 0 ),...,c( n )` — числа,

— APLAN - эквивалент для полинома (7), (9), (21)

$$y_{n,s} = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n =$$

$$= method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

17. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (24)*

(DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n)

имеет APLAN - эквивалент для:
— оператора $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— полиномов $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$, $y_{n,s-1}$, *условий (4)*
и $n = k + p$, *где* $p \in N$. *Тогда:*

1. Преобразование

$$y_{n,s} = procedure_D_5(\ \texttt{DO, f, y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ )$$

— алгебраическое.

2. Для сложности этого преобразования справедливо тождество

$$Q(\ procedure_D_5(\ \texttt{DO, f , y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ )\ ) =$$

$$O(n) + Q(\ procedure_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ ).$$

Доказательство. Оператор на языке APLAN процедуры 1 d_x мы построим и исследуем в следующих лекциях.

Выше мы рассмотрели выходы операторов процедуры $procedure_D_5$ в процессе преобразования входа (24). Эти выходы доказывают.

Процедура 1 преобразует вход (24).

Операторы процедуры $procedure_D_5$ — запись на языке APLAN конечного числа правил преобразования и конечной стратегии применения этих правил. Следовательно. Эти операторы выполняют алгебраические преобразования.

APLAN - процедура 1 — линейная. Следовательно.

1. Преобразование процедурой 1 входа (24) алгебраическое.
2. Вычислительная сложность APLAN - процедуры 1 тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры.

Оператор d_x дифференцирует алгебраический полином порядка n вида (2). Следовательно. Сложность этого преобразования $Q(d_x(y_n)) = O(n)$.

Сложность подстановки полиномов порядка n в полином f

```
f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;
```

растет с ростом n и скорость этого роста не выше $O(n)$.

Сложность преобразования `LDUMK := ( DO + f_s = 0 );` не зависит от n.

Сложность преобразования APLAN - процедурой $procedure_D_1$ входа

$$(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ ) \ \sim$$

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G = 0\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

— содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши для ЛДУМК порядка k, отрезка аппроксимации $[a,b]$ и $n = p + k$, где $p \in N$, оценена в теореме 3.1.

$$Q(\ procedure_D_1(\ \texttt{LDUMK , init_cond , InitPoint , interval , n}\ )\ ) =$$

$$O(n^3)\ + Q(\ canplf(A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G)\ )\ +$$

$$Q(\ canplf(E_{m,p} \in L_2^{m\backslash p}(a,b;\rho) = ?)\ )\,.$$

Следовательно. Сумма приведенных выше оценок вычислительной сложности преобразования операторами APLAN - процедуры 1 тождественна доказываемой оценке.

18. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (24)*

(`DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n`)

эквивалентен входу алгоритма 1

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет APLAN - эквивалент для:
— *оператора* $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— *полиномов* $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$, $y_{n,s-1}$,
— *условий (4)*
и имеет рациональные константы и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда справедливо тождество

$$y_{n,s} = procedure_D_5(\ \texttt{DO, f, y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ ) =$$
$$algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.

APLAN - процедура 1 имеет только алгебраические преобразования.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

По условию теоремы вход (24) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент для входа алгоритма 1

$$algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Следовательно.

APLAN - процедура 1 преобразует вход (24) в APLAN - эквивалент для полинома (21) точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

$$y_{n,s} = procedure_D_5(\ \texttt{DO, f, y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ ) \quad =$$
$$y_{n,s} = algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

19. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1*

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— полином $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$,
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$,
и имеет $n = k + p$, *где* $p \in N$. *Тогда:*

1. Преобразование (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_5(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

алгебраическое.

2. С ростом n *сложность преобразования (21) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1*

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— полином $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$,
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$,
и имеет рациональные константы и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует эквивалент для входа алгоритма 1 в эквивалент для полинома (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

20. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1*

$$y_{n,s} = algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— полином $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$ *— приближение метода 1,*
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$,
и имеет $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда результат преобразования этого входа по алгоритму 1 — полином (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_5(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (7) метода 1

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

где $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$, *и эти полиномы тождественны.*

Доказательство. Алгебраический полином (8)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}),$$

метода 1 и алгоритма 1 тождественны по определению метода 1 и алгоритма 1.

Следовательно. Тождественны ЛДУМК

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0$$

преобразования (7) и ЛДУМК (22).

Следовательно. Согласно лемме 3.3.

Алгебраический полином (9) — результат преобразования системы из ЛДУМК (22) и условий (4)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ),$$

существует тогда и только тогда, когда существует алгебраический полином (23)

$$y_{n,s} = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ),$$

— результат преобразования 3 алгоритма 1 системы из ЛДУМК (22) и условий (4) и эти полиномы тождественны.

21. Метод 1 и проекционный метод 1

Теорема 5. *Метод 1*

$$y_n = method_D_5(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,,$$

где $$y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \dots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)!\,,$$

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

где $$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

(5) — (11) решения задачи Коши для ЛДУМК дополненного нелинейностью — полиномом (3), (4)

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,\quad init_cond(y,d)$$

есть алгебраический эквивалент для преобразования этой задачи Коши (3), (4) в ЛИУМК Вольтерра дополненное нелинейностью — полиномом (12)

$$A\cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,$$

где $$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g = G + D[P_{k-1}]\,,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

и решения интегрального уравнения (12) по проекционному методу 1

$$u_p = G_method_I_5(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}\,,$$

где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1, 2, \ldots$

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\,A \cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + f_s\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$$

(14) — (19). Справедливы следующие утверждения.

1. Преобразование (7) — (11)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$= solve(\ \ init_cond(y_n \in P_n = ?\,,\, d)\ \ ,$$

$$A \cdot (y_n \in P_n = ?)^{(k)} + D[y_n \in P_n = ?] + G + f_s + (E_{m,p} \in L_2^{m \setminus p}(a,b;\rho) = ?) = 0\ \ )$$

на одной итерации метода 1 (5) — алгебраическое.

2. Алгебраический полином (7)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

$s = 1, 2, \ldots$ *(результат преобразования одной итерации метода 1) существует тогда и только тогда, когда существует полином* (15)

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g + f_s\ ] = 0\ )\,,$$

где $\quad f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$

(результат преобразования ЛИУМК (17) эквивалентного ЛДУМК (22) и условиям (4) по проекционному методу с оператором (18)) и для этих полиномов справедливо тождество

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{k-1}\,. \tag{33}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.

Для задачи Коши для ЛДУМК дополненного нелинейностью — полиномом (3), (4). Преобразование (7) метода 1 тождественно преобразованию (23)

$$y_{n,s} = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Согласно теореме 3. Преобразование (23) — алгебраическое.

Следовательно. *Преобразование (7) метода 1 — алгебраическое.*

Для начальных приближений проекционного метода 1 $u_{p,0} = 0$ и метода 1

$$y_{n,0} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1} = P_{k-1}$$

справедливо тождество (33) $y_{n,0} = V^k[u_{p,0}] + P_{k-1}\,.$

Если для полиномов $y_{n,s-1}$ и $u_{p,s-1}$ справедливо тождество (33)

$$y_{n,s-1} = V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}\,,$$

то тождественны результаты их преобразования — полиномы (8) и (16)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$$

$$f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)})) .$$

Следовательно.

Для ЛИУМК преобразования (15) и ЛДУМК (22) справедливо тождество (17)

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f_s = 0) = subs(y = V^k[u] + P_{k-1},\ (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0) .$$

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )$$

(результат преобразования по методу 1 этого ЛДУМК и условий (4))
существует тогда и только тогда, когда существует полином (15)

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?]] + g + f_s\ ] = 0\ )$$

— результат преобразования по проекционному методу ЛИУМК (17)

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f_s = 0) = subs(y = V^k[u] + P_{k-1},\ (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0) .$$

и для этих полиномов для $s = 1, 2, \ldots$ справедливо тождество (33)

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{k-1} .$$

22. Класс $D_{5,X}$ задач Коши для уравнений типа D_5

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к проекционному методу (15)

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A\cdot(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g + f_s\ ] = 0\ )$$

решения ЛИУМК — преобразования задачи Коши для ЛДУМК (22), (4)

$$(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g + f_s = 0\ ) =$$

$$subs(\ y = D[V^k[u]] + P_{k-1}\ ,\ (\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\ )\ )\ ,$$

$$\text{где} \qquad u = y^{(k)}\ , \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\ , \quad g = G + D[P_{k-1}]\ ,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)!\cdot(x-d)^{k-1}\ .$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора (18)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b])\cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b])\cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)$$

в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
Доказывают следующее утверждение.

Вывод 12. *Проекционный метод 1*

$$u_p = G_method_I_5(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}$$

(14), где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1,\ 2,\dots$ *полином* $u_{p,s}$ *вычисляет проекционный метод (15) – (19) (эквивалент для преобразования (7))*

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\,A\cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + f_s\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$f_s = f(x,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho),\ C_{[a,b]},\ \dots$ *функций* $y(x)\ ,\ x\in[a,b]$ *определяют класс* $D_{5,X}$ *задач Коши для ЛДУМК дополненных нелинейностью – полиномом (3), (4) (типа* D_5 *)*

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|u-u_p\|_X\ /\ \inf_{c_0,\dots,c_p}\|u(x)-(c_0+\dots+c_p\cdot x^p)\|_X \qquad (34)$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (3), (4) класса $D_{5,X}$ *в производную порядка* k *решения этой задачи* $u = y^{(k)} =$

$$(\ solve(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \, , \ init_cond(y, d) \, , \ y = ? \ ) \ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши в интегральное уравнение (12)

$$(\, A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0 \,) =$$

$$subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1} \, , \ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \,) \,) \, ,$$

где

$$u = y^{(k)} = ? \, , \quad V[u] = \int_d^x u(t) \, dt \, , \quad g = G + D[P_{k-1}] \, ,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x - d)^{k-1} \, ,$$

и решением этого интегрального уравнения по проекционному методу 1.

$$u_p = G_method_I_5(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0 \, , \ [a, b] \, , \ p \ ) \ = \ \lim_{s \to \infty} u_{p,s} \, .$$

Классы $D_{5,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{5,C_{[a,b]}}$ *задач Коши (3), (4) представительны.*

23. Эффективность метода 1

Следствие 1. *Пусть вход метода 1*

$$(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G+f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})=0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )$$

имеет ЛДУМК дополненное нелинейностью — полиномом (3), условия (4) и $n=p+k$ *, где* $p\in N$ *, и пусть пространство* $X=C_{[a,b]},\ L_2(a,b;\rho),\ \dots$.

Тогда в пространстве X *коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)}-y_n^{(k)}\|_X\ /\ \inf_{c_0,\dots,c_n}\|y^{(k)}(x)-(c_0+\dots+c_n\cdot x^n)^{(k)}\|_X \tag{35}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи* $y^{(k)}=(\ solve$

$$(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G+f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})=0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ y=?\ )\ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 $y_n=$

$$method_D_5(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G+f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

и дифференцированием тождественен коэффициенту оптимальности (34)

$$\|u - u_p\|_X \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|u(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X$$

аппроксимации преобразования интегрального уравнения (12) (эквивалентного задаче Коши (3), (4)) в его решение $u = solve($

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, V^k[u] + P_{k-1}, \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ u = ?\ )$$

преобразованием этого интегрального уравнения по проекционному методу 1

$$u_p = G_method_I_5(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a, b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}$$

(14), где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1,\ 2, \ldots$ *полином* $u_{p,s}$ *вычисляет эквивалент (15) для преобразования (9)*

$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?]] + g + f_s\ ] = 0\ )\,,$

где $f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,.$

Доказательство. Согласно теореме 5. Для полиномов (7)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\,,$$

где $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$ и (15)

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g + f_s\ ] = 0\ )\,,$$

где $f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$ справедливо тождество (33)

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{p-1}\,,\quad s = 1, 2, \ldots, .$$

Следовательно. Справедливо тождество $y^{(k)}_{n,s} = u_{p,s}\,,\quad s = 1, 2, \ldots, .$

Последовательность полиномов (7) $y_{n,s}\,,\quad s = 1, 2, \ldots,$ имеет предел y_n (5) тогда и только тогда, когда последовательность полиномов $u_{p,s}\,,\quad s = 1, 2, \ldots,$ (15) имеет предел u_p и справедливо тождество $y^{(k)}_n = u_p\,.$

Согласно определению уравнения (12), справедливо тождество (13) $y^{(k)} = u\,.$

Следовательно. Тождественны коэффициенты оптимальности (34) и (35).

24. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 12 доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Пусть пространство* $X = L_2(a, b; \rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *и пусть задача Коши (3), (4) типа* D_5 *принадлежит к классу* $D_{5,X}$.

Тогда в пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности (35)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \;/\; \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X$$

аппроксимации преобразования этой задачи Коши (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи*

$$y = solve(\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0\,,\; init_cond(y, d)\,,\; y = ?\,)$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 $y_n =$

$$method_D_5(\, A{\cdot}y^{(k)}{+}D[y]{+}G{+}f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0\,,\; init_cond(y, d)\,,\; [a, b]\,,\; n\,)$$

и дифференцированием $y_n^{(k)} = (d/dx)^k y_n$.

Класс $D_{5,X}$ *определяет проекционный метод (15).*

Классы $D_{5,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{5,C_{[a,b]}}$ *задач Коши (3), (4) представительны.*

25. Метод 1 и сеточные методы [6]

$$y_h = s_method(\ y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ q\ ) \qquad (36)$$

По сеточным методам [6] на отрезке $[a, b] = [d, b]$ решают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений разрешенных относительно старшей производной

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\quad init_cond(y, d)\ .$$

Результат решения задачи Коши по сеточному методу [6] — сеточная функция y_h , $h = (b - a)/q$ (36) — аппроксимирует значения функции — решения задачи

$$y(x) = solve(y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ y = ?\ )$$

в узлах сетки $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ \ldots,\ x_q = b$, — $y_h(x_i) \approx y(x_i)$.

Если функция $y(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $r \geq p$ — $y(x) \in C^r_{[a,b]}$ и число узлов q сетки метода (36) растет, то погрешность этой аппроксимации убывает [6]

$$\|y(x) - s_method(\ y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ q\ )\|_{C_q} =$$

$$\max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(h^p)\,, \quad \text{где} \quad p \le 6\,.$$

Если функция $y = y(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную порядка r , то в пространстве $C_{[a,b]}$ для величины наилучшего приближения этой функции алгебраическими полиномами порядка n справедливо тождество

$$y \in C^r_{[a,b]} \;\to\; E_{n,C_{[a,b]}}[y] = \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}} = O(n^{-r}) \;\; [3].$$

Из этих тождеств и вывода 13 следует утверждение.

Вывод 14. *Пусть задача Коши*

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})\,, \quad init_cond(y, d)$$

имеет нелинейность f — полином (3), принадлежит к классу $D_{5,C_{[a,b]}}$ и ее решение $y(x)$ имеет производную порядка $7 + k$.

Тогда справедливо тождество

$$\|(y(x) - method_D_5(\, y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})\,,\, init_cond(y, d)\,,\, [a, b]\,,\, n\,))^{(k)}\|_{C_{[a,b]}}$$

$$=$$

$$o(\|y(x) - s_method(\, y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})\,,\, init_cond(y, d)\,,\, [a, b]\,,\, n\,)\|_{C_n})\,.$$

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (18) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 14.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 15. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами (ЛДУМК) дополненного нелинейностью — полиномом (3), (4).*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \ , \ init_cond(y, d) \ .$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования.

Дополнение

Метод 1'. Модификация метода 1.

$$y_n = method_D_5'(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,,$$

где $\quad y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \dots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)!\,,$

$$y_{n,s} = method_D_1'(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ )\ ,$$

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,, \qquad s = 1,2,\dots\,.$$

Метод $method_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1.

$$y_{n,s} = algorithm_D_5'(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =$$

$$(\quad f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f_s\ ) \ \rightarrow\ (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\ ),$$

$$y_{n,s} = algorithm_D'_1(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ ).$$

Алгоритм $algorithm_D'_1$ рассмотрен в лекции 3.

APLAN - процедура 1'. Модификация APLAN - процедуры 1.

```
y1_n := d_x( y_n ) ;                                  /*  y'_n  */

y2_n := d_x( y1_n ) ;                                 /*  y''_n  */
                                  ...
yk_n := d_x( yl_n ) ;                                 /*  y^(k)_n  */

f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;

LDUMK := ( DO + f_s = 0 ) ;
```

```
y_n := procedure_D'_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);
```

APLAN - процедура `procedure_D'_1` рассмотрена в лекции 3.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

3. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* — М.: Мир. — 1969. — 368 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Лекция 8

Программа для решения задачи Коши для ЛДУМК с нелинейностью — функцией

1. Задача

В системе алгебраического программирования APS [1] построить процедуру

$$y_n = procedure_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, \ldots, y^{(k-1)}) = 0\ , \tag{1}$$

$$init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )\ =\ \ c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n\ . \tag{2}$$

Эта процедура преобразует в полином (2) задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами (ЛДУМК) дополненного нелинейностью — функцией — систему уравнений:

— ЛДУМК дополненное нелинейностью — функцией

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\ )\ = \tag{3}$$

$$(\ A \cdot y^{(k)} + B \cdot y^{(k-1)} + \cdots + C \cdot y + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\ )\,,$$

где $A,\ B, \ldots, C,\ G\,,$ *— полиномы,* $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *— функция,*

— начальные условия

$$init_cond(y, d)\ =\ \{\ y(d) = Y_0\,,\ y'(d) = Y_1\,, \ldots,\ y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\ \}\,. \tag{4}$$

2. Метод 1 — выполняет преобразование (1), (2)

$$y_n = method_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,, \tag{5}$$

где $$y_{n,0} = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \cdots + Y_{k-1} \cdot (x - d)^{k-1}/(k-1)!\,, \tag{6}$$

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\,, \tag{7}$$

F_s — алгебраический полином интерполирующий в узлах Чебышева функцию

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,, \tag{8}$$

$$F_s = U_n[f_s] = f_s(x_0) \cdot L_0(x) + \cdots + f_s(x_n) \cdot L_n(x)\,, \tag{9}$$

$$x_i = a + (b - a) \cdot (1 - \cos(i \cdot \pi/n))/2\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Метод $method_D_1$ — алгоритмизация τ - метода Ланцоша [2] лекции 3. Эта алгоритмизация основана на a - методе [3].

3. Интегральный эквивалент для задачи Коши (3), (4)

Начальные условия (4) определяют подстановку $y = V^k[u] + P_{k-1}$, где

$$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

Эта подстановка преобразует дифференциальное уравнение (3) в интегральное уравнение

$$subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\,)\,) \ =$$

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,, \qquad (12)$$

где $g = G + D[P_{k-1}]$.

Уравнение (12) — ЛИУМК (линейное интегральное уравнение с многочленными коэффициентами) Вольтерра дополненное нелинейностью — функцией.

Уравнение (12) имеет решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда имеет решение $y(x)$ задача Коши (3), (4) и для этих решений справедливы тождества

$$y(x) = V^k[u(x)] + P_{k-1}\,, \quad u(x) = y^{(k)}(x)\,. \qquad (13)$$

4. Проекционный метод 1 [4] — эквивалент для метода 1

$$u_p = G_method_I_6(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\ldots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ ) \ = \ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}\,, \quad (14)$$

где $u_{p,0} = 0\,,\ \ p = n-k$ и для $s = 1,2,\ldots$

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\,A\cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + F_s\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,, \quad (15)$$

где $F_s = U_n[f_s]\,,\ \ f_s = f(\,x,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1}),\ldots,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1})^{(k-1)}\,)\,,$ (16)

$$(\ A\cdot u + D[V^k[\,u\,]] + g + F_s = 0\ ) =$$

$$subs(\,y = V^k[u] + P_{k-1}\,,\ (\,A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,)\,)\,. \quad (17)$$

Оператор S_p (15) преобразует функцию $f \in L_2(a,b;\rho)$ в частную сумму порядка p ряда Фурье - Чебышева функции f на отрезке $[a,b]$ [5] (с. 70)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b])\cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b])\cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)\,, \quad (18)$$

где $\quad T_i(z) = \cos(i\cdot\arccos(z))\,,\ \ z = 2\cdot(x-a)/(b-a) - 1\,.$

Неизвестные уравнения (15) — (символьные) коэффициенты полинома

$$(\,u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\,) = a_0\cdot T_0(z) + \cdots + a_p\cdot T_p(z)\,,\ \{a_0,\ldots,a_p\} \in Atom\,. \quad (19)$$

5. Актуальность задачи и эффективность метода 1

Системы компьютерной алгебры (СКА) Maple, Mathematica, Matlab, APS, Derive и другие стали естественной средой математического моделирования.

Задачу Коши для ЛДУМК дополненных нелинейностью — функцией (3), (4) применяют в математических моделях достаточно часто.

СКА вычисляют решение задачи Коши (3), (4) в следующем виде.

1. Композиция функций СКА. Такая композиция существует очень редко.
2. Частная сумма ряда Тейлора. Эта аппроксимация очень далека от наилучшей.

Алгебраический полином (2) — вид аппроксимации решения уравнения $(\ y(x)\,,\ x \in [a,b]\ ) = solve(\ F[y] = 0\,,\ y = ?\ )$ предпочтительный для СКА.

τ - Метод Ланцоша преобразует задачу Коши для ЛДУМК в полином (2).

Норму погрешности проекционного метода (15) в пространстве $C_{[a,b]}$, $L_2(a,b;\rho), \ldots$ определяют аппроксимационные характеристики оператора S_p (18).

$$A = 1 \ \rightarrow\ \|u_s - u_{p,s}\|_X = (1 + o(1)) \cdot \|u_s - S_p[u_s]\|_X\,,\ \ X = C_{[a,b]} \vee L_2(a,b;\rho)\,. \quad (20)$$

В пространстве $L_2(a,b;\rho)$ они наилучшие среди операторов проектирования [5].
В пространстве $C_{[a,b]}$ они оптимальные среди операторов проектирования [5].

6. Алгоритм 1 — выполняет преобразование (7) – (9)

$$y_{n,s} = algorithm_D_6(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,$$
$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,. \qquad (21)$$

1. Преобразовать функцию $f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})$ (3) и полином $y_{n,s-1}$ входа в функцию (8) $f_s = f(x,y_{n,s-1},y'_{n,s-1},\dots,y^{(k-1)}_{n,s-1})\,.$
2. Преобразовать функцию f_s (8) в полином $F_s = U_n[f_s]$ (9).
3. Преобразовать оператор $A\cdot y^{(k)} + D[y] + G$ (3) и полином F_s (9) в ЛДУМК (11) преобразования (7) метода 1
$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,. \qquad (22)$$
4. По алгоритму 3.1 преобразовать ЛДУМК (22) и часть входа метода 1 (5) $init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n$ в искомый (21) полином $y_{n,s} =$
$$algorithm_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,. \qquad (23)$$

7. Вход алгоритма 1 для APLAN - процедуры 1

$$\texttt{(DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n)} \qquad (24)$$

$$\sim \quad (A\cdot y^{(k)}+D[y]+G\,,\ f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Структура данных на входе APLAN - процедуры 1.

```
NAME  DO ;
```

```
DO := A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1)  + ··· +  C * y + G ;
```  (25)

— APLAN - эквивалент для дифференциального оператора уравнения (3)

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G =$$

$$A(x)\cdot y^{(k)}(x) + B(x)\cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x)\cdot y(x) + G(x)\,.$$

`NAME  f` — Терм атомов `x , y , y1 , ...` и констант (чисел) с операциями и функциями вычисляемыми в системе APS.

— APLAN - эквивалент функции f уравнения (3).

Начальная точка `InitPoint := d ;` и **условия** `init_cond :=`

`( y = Y_0 , dif(y , 1) = Y_1 , ... , dif(y , k-1) = Y_k-1 ) ;` (26)

— APLAN - эквивалент для начальных условий (4)

$$init_cond(y,d) \;=\; \{\; y(d) = Y_0\,,\; y'(d) = Y_1\,, \ldots,\; y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1}\;\}\,.$$

`y_n := h + ... + q * x^n`	$\sim$	$y_{n,s-1}$.	Приближение к решению.
`interval := (a, b)`	$\sim$	$[a,b]$.	Отрезок аппроксимации.
`n`	$\sim$	$n \in N$.	Порядок полинома $y_{n,s}$ (21).

Составляющие оператора (25), полинома f и условий (26).

Атомы `x , y , y1 , ... , yk`

— APLAN - эквивалент для аргумента x, искомой функции y и ее производных.

`NAME A , B , ... , C , G`

— Термы атома `x` и констант (чисел) с операциями `* , + , ^`

— APLAN - эквивалент для полиномов

$$A(x)\,,\; B(x)\,, \ldots,\; C(x)\,,\; G(x)\,.$$

8. APLAN - процедура 1 — $procedure_D_6$

```
  y1_n := d_x( y_n ) ;                                  /*  y'_n  */

  y2_n := d_x( y1_n ) ;                                 /*  y''_n  */

                                  ...

  yk_n := d_x( yl_n ) ;                                /*  y^(k)_n  */

  f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;

  F_s := Cheb( f_s , intefval , n ) ;                   /* U_n[f_s] */

  LDUMK := ( DO + F_s = 0 ) ;

y_n := procedure_D_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);
```

9. Вход APLAN - процедуры 1 для модельной задачи

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5 \ , \quad x \in [0.5, 1] \ . \tag{27}$$

Задача Коши (27) — модельная для методов Рунге - Кутта [6] (с. 106).

Описание на языке APLAN входа (24) для задачи Коши (27).

```
   process[1] := (
                          DO := dif(y , 1) + 1.5 * y ;
f := (-1 * (x + 3)) * y ^ 2 + (-1 * x * (x + 2)) * y ^ 3 + -1.5 * y;
                        y_n := -1.6 ;
                  InitPoint := 0.5 ;
                  init_cond := ( y = -1.6 ) ;
                   interval := (0.5 , 1) ;
                  ... );
```
(28)

10. Преобразование APLAN - процедурой 1 входа (28)

$$n = 1\,, \quad y_{n,0} = -1.6\,.$$

```
f_s = -2.56 * (x + 3) + 4.096 * x * (x + 2) + 2.4;

 F_s =                    11.776 * x + -7.328;

 LDUMK =          ( dif(y , 1) + 1.5 * y +
                    11.776 * x + -7.328 = 0 );

y_n =                 0.65163 * x + -1.92582 ;

y_n =                 1.67885 * x + -2.43942 ;

y_n =                 2.21568 * x + -2.70784 ;
                       ...
y_n =                 2.22257 * x + -2.71129 ;
```

11. Результаты преобразования в классическом виде

$$f_1 = subs(y = y_{n,0}, f) = -64/25 \cdot (x+3) + 512/125 \cdot x \cdot (x+2) + 2.4\,,$$

$$U_n[f_1] = subs(y = y_{n,0}, f) = 11.776 \cdot x - 7.328\,,$$

$$LDUMK = (y' + 1.5 \cdot y + 11.776 \cdot x - 7.328 = 0)\,,$$

$$y_{n,1} = 0.65163 \cdot x - 1.92582\,,$$

$$y_{n,2} = 1.67885 \cdot x - 2.43942\,,$$

$$y_{n,3} = 2.21568 \cdot x - 2.70784$$

$$\ldots$$

$$y_{n,s} = 2.22257 \cdot x - 2.71129\,.$$

12. Наилучшее приближение решения задачи Коши (27)

$$y(x) = 1/(x+2) - 1/x =$$

$$solve(\ y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3 + (x+3)\cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ) = -2/(x\cdot(x+2))\,. \quad (29)$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y = 1/(x+2) - 1/x$ (29) на отрезке $[0.5, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_n(y,[0.5,1])\}_{n=0}^{16} = \{-1,\ 0.45,\ -0.08,\ 0.014,\ -0.002,\ 0.0004,$$

$$-7.2\cdot 10^{-5},\ 1.2\cdot 10^{-5},\ -2.1\cdot 10^{-6},\ 3.6\cdot 10^{-7},\ -6.2\cdot 10^{-8},\ 10^{-8},$$

$$-1.8\cdot 10^{-9},\ 3.1\cdot 10^{-10},\ -5.4\cdot 10^{-11},\ 9.3\cdot 10^{-12},\ -1.6\cdot 10^{-12}\}\ . \quad (30)$$

Функция $y(x) = 1/(x+2) - 1/x = -2/(x\cdot(x+2))$ (29) — аналитическая в комплексной плоскости, имеет полюсы в точках 0 , -2 и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (с ростом параметра n) регулярно убывают к нулю

$$\{\ |a_{n+1}(y,[0.5,1])|/|a_n(y,[0.5,1])| = \gamma_n\ \}_{n=0}^{15} = \{0.45,\ 0.18,\ 0.18, \ldots, 0.18\}\ .$$

Норма полинома Чебышева тождественна 1 .

$$\|\cos(i\cdot\arccos(4\cdot x-3))\|_{C_{[0.5,1]}}=\|\cos(i\cdot\arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}}=\|\cos(i\cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}}=1\ .$$

Следовательно. Из этих тождеств следуют утверждения.

Вывод 1. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y=1/(x+2)-1/x$ *(29) алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}}\ =\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\ )$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка $n+1$ *функции* $y(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5,1]$.

$$\Theta(\ E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)]\ )=|a_{n+1}(y,[0.5,1])|\ .$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n}\|y(x)-(c_0+\cdots+c_n\cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}}=(1+\beta_n)\cdot|a_{n+1}(y,[0.5,1])|\ , \qquad (31)$$

$$\text{где}\ \ |\beta_n|\le\beta\approx 0.2\,,\qquad |a_n(y,[0.5,1])|\approx Const\cdot 0.18^n\ .$$

Вывод 2. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \;=\; C_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$solve(\; y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \,,\; y(0.5) = -8/5 \;) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_6(\; D = y' \,,\; f = -1 * \ldots \,,\; [0.5, 1] \,,\; n \;) \qquad (32)$$

имеет главную часть — отношение $\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y, [0,5,1])| = \Theta(\; C_n \;)$ *,*
где $a_{n+1}(y, [0.5, 1])$ *— коэффициент*
Фурье - Чебышева порядка $n+1$ *функции* $y(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5, 1]$ *.*

Справедливо тождество

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y, [0,5,1])| \;=\; (1 + \beta_n) \cdot \|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)] \,,$$

$$\text{где } \; |\beta_n| \le \beta \approx 0.2 \,, \qquad |a_n(y, [0.5, 1])| \approx Const \cdot 0.18^n \,.$$

Коэффициенты Фурье - Чебышева функции $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ на отрезке $[0.5, 1]$ принимают следующие значения

$$\{a_n(y', [0.5, 1])\}_{n=0}^{20} = \{2,\ -1.4,\ 0.36,\ -0.08,\ 0.018,\ -0.0036,\ 0.00072,$$

$$-0.00014,\ 2.7 \cdot 10^{-5},\ -5.2 \cdot 10^{-6},\ 10^{-6},\ -1.8 \cdot 10^{-7},\ 3.4 \cdot 10^{-8},\ -6.3 \cdot 10^{-9},$$

$$1.2 \cdot 10^{-9},\ -2.1 \cdot 10^{-10},\ 3.8 \cdot 10^{-11},\ -7 \cdot 10^{-12},\ 1.3 \cdot 10^{-12},\ -2.3 \cdot 10^{-13},\ 4 \cdot 10^{-14}\}\,.$$

Функция $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ — аналитическая в комплексной плоскости, имеет полюсы в точках 0, -2 и ее коэффициенты Фурье - Чебышева (с ростом параметра n) регулярно убывают к нулю

$$\{\ |a_{n+1}(y', [0.5, 1])|/|a_n(y', [0.5, 1])| = \gamma_n\ \}_{n=0}^{15} = \{0.7,\ 0.25,\ 0.23, \ldots, 0.18\}\ .$$

Норма полинома Чебышева тождественна 1.

$$\|\cos(i \cdot \arccos(4 \cdot x - 3))\|_{C_{[0.5,1]}} = \|\cos(i \cdot \arccos(x))\|_{C_{[-1,1]}} = \|\cos(i \cdot t)\|_{C_{[0,\pi]}} = 1\ .$$

Из этих тождеств следует утверждение.

Вывод 3. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ *алгебраическими полиномами порядка* $n-1$

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)'\|_{C_{[0.5,1]}} \;=\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\;)$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *на отрезке* $[0.5,1]$.

$$\Theta(\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\;) = |a_n(y',[0.5,1])|\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)'\|_{C_{[0.5,1]}} = (1+\delta_n)\cdot|a_n(y',[0.5,1])|\;,$$

где $$|\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y',[0.5,1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$$

Для коэффициентов Фурье - Чебышева на отрезке $[0.5,1]$ (30) функции $y = 1/(x+2) - 1/x$ (29) и ее производной $y' = 1/x^2 - 1/(x+2)^2$ справедливы неравенства

$$|a_n(y',[0.5,1])| > |a_n(y,[0.5,1])| > |a_{n+1}(y,[0.5,1])| \quad n = 0,1,\ldots\,.$$

Из выводов 1, 2 и 3 и этого неравенства следуют утверждения.

Вывод 4. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *величина наилучшего приближения функции* $y = 1/(x+2) - 1/x$ *(29) алгебраическими многочленами порядка* n

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;=\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)] =$$

$$\max\{E_{n,C_{[0.5,1]}}[y(x)],\; E_{n-1,C_{[0.5,1]}}[y'(x)]\}$$

имеет главную часть $\Theta(\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\;)$.

Эта главная часть тождественна модулю коэффициента Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *на отрезке* $[0.5, 1]$.

$$\Theta(\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\;) = |a_n(y', [0.5, 1])|\,.$$

Справедливо тождество

$$\inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C^1_{[0.5,1]}} = (1 + \delta_n) \cdot |a_n(y', [0.5, 1])|\;,$$

где $\qquad |\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y', [0.5, 1])| \approx Const \cdot 0.18^n\,.$

Вывод 5. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *коэффициент оптимальности*

$$\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)] \;=\; C^1_n$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение (29)

$$solve(\; y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3 + (x+3)\cdot y^2\,,\; y(0.5) = -8/5\;) = y(x) = -2/(x\cdot(x+2))$$

преобразованием эквивалента для задачи Коши (27) в алгебраический полином y_n *порядка* n *, в частности, преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)*

$$y_n = procedure_D_6(\; D = y'\,,\; f = -1 * \ldots,\; [0.5,1]\,,\; n\;)$$

имеет главную часть — отношение $\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; |a_n(y',[0,5,1])| = \Theta(\; C^1_n\;)$ *,*
где $a_n(y',[0.5,1])$ *— коэффициент*
Фурье - Чебышева порядка n *функции* $y'(x)$ *(29) на отрезке* $[0.5,1]$*.*

Справедливо тождество

$$\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; |a_n(y',[0,5,1])| \;=\; (1+\delta_n)\cdot\|y-y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \;/\; E_{n,C^1_{[0.5,1]}}[y(x)]\,,$$

$$\text{где}\;\; |\delta_n| \le \delta \approx 0.2\,, \qquad |a_n(y',[0.5,1])| \approx Const\cdot 0.18^n\,.$$

13. Эффективность процедуры 1 на модельной задаче

В пространстве $C_{[0.5,1]}$ норма погрешности аппроксимации функции

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

(29) (решения задачи Коши для ЛДУМК (27)) полиномом (32)

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1 * \ldots\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5, 1]\ ,\ n\ )$

(результатом преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{10} = \{0.18,\ 0.069,\ 0.009,\ 0.0012,\ 0.00019,$$

$$3.6 \cdot 10^{-5},\ 5.7 \cdot 10^{-6},\ 9.2 \cdot 10^{-7},\ 1.6 \cdot 10^{-7},\ 7.3 \cdot 10^{-8}\}\ .$$

Из вывода 2 и этих тождеств следует утверждение.

Вывод 6. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *главная часть*

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ |a_{n+1}(y,[0.5,1])|$$

коэффициента оптимальности

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \ y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \ \|_{C_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$$

преобразованием процедурой 1 входа (28)

$$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\,,\ f = -1{*}\ldots\,,\ y_{n,0} = -8/5\,,\ y(1/2) = -8/5\,,\ [0.5,1]\,,\ n\ )$$

принимает значения

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_{n+1}(y,[0.5,1])| = Const + \alpha_n\ , \qquad \text{где}$$

$$\{Const + \alpha_n\ \}_{n=1}^{9} \ = \ \{2.2\ ,\ 4.9\ ,\ 4.5\ ,\ 3\ ,\ 2.6\ ,\ 3\ ,\ 2.7\ ,\ 2.6,\ 2.6\}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

В пространстве $C_{[0.5,1]}$ **норма погрешности** аппроксимации функции

$(solve(\ y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3+(x+3)\cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ ))' = y'(x) = (-2/(x\cdot(x+2)))'$

(производной решения (29) задачи Коши для ЛДУМК (27)) производной полинома

$y'_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1{*}\ldots\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5,1]\ ,\ n\ )'$

(32) (производной результата преобразования APLAN - процедурой 1 входа (28), содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27)) принимает следующие значения

$$\{\|y' - y'_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{9} =$$

$$\{1.6,\ 0.44,\ 0.09,\ 0.019,\ 0.0039,\ 0.00075,\ 0.00015,\ 2.8\cdot 10^{-5},\ 5.5\cdot 10^{-6}\}.$$

Из этих тождеств и тождеств $\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{10} =$

$\{0.18,\ 0.069,\ 0.009,\ 0.0012,\ 0.00019,\ 3.6{\cdot}10^{-5},\ 5.7{\cdot}10^{-6},\ 9.2{\cdot}10^{-7},\ 1.6{\cdot}10^{-7},\ 7.3{\cdot}10^{-8}\}$

следует тождество $\{\|y - y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{9} = \{\|y' - y'_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{9}$.

Из вывода 5 и этих тождеств следует утверждение.

Вывод 7. *В пространстве* $C^1_{[0.5,1]}$ *главная часть*

$$\|y - y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \ / \ |a_n(y', [0.5, 1])|$$

коэффициента оптимальности

$$\|y - y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} \ / \ \inf_{c_0,\dots,c_n} \| \ y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n) \ \|_{C^1_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ ) = y(x) = -2/(x \cdot (x+2))$

(29) преобразованием (32) процедурой 1 входа (28)

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\,,\ f = -1{*}\dots\,,\ y_{n,0} = -8/5\,,\ y(1/2) = -8/5\,,\ [0.5, 1]\,,\ n\ )$

принимает значения

$$\|y - y_n\|_{C^1_{[0.5,1]}} / |a_n(y', [0.5, 1])| = 1 + \alpha_n \ , \qquad \text{где}$$

$$\{1 + \alpha_n\ \}_{n=1}^{8} \ = \ \{1.1\ ,\ 1.2\ ,\ 1.1\ ,\ 1.05\ ,\ 1.1\ ,\ 1.04\ ,\ 1.07\ ,\ 1.04\}\ .$$

Наилучший по точности метод имеет коэффициент оптимальности 1.

Вывод 8. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ *норма погрешности аппроксимации* $\|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}}$ *производной решения (29) задачи Коши (27)*

$solve(\ y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2\ ,\ y(0.5) = -8/5\ )' = y'(x) = (-2/(x \cdot (x+2)))'$

производной результата преобразования (32) процедурой 1 входа (28) (содержащего APLAN - эквивалент для задачи Коши (27))

$y_n = procedure_D_6(\ D = y'\ ,\ f = -1 * \ldots\ ,\ y_{n,0} = -8/5\ ,\ y(1/2) = -8/5\ ,\ [0.5, 1]\ ,\ n\ )$

имеет главную часть — величину наилучшего (в пространстве $C_{[0.5,1]}$ *) приближения функции* $y'(x)$ *(29) алгебраическими полиномами порядка* $n-1$

$$\Theta(\ \|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}}\ ) \ = \ \inf_{c_0,\ldots,c_{n-1}} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1})\|_{C_{[0.5,1]}}\ .$$

Справедливо тождество

$$\|y'(x) - y'_n(x)\|_{C_{[0.5,1]}} \ =$$

$$(1 + \alpha_n) \ \cdot \ \inf_{c_0,\ldots,c_{n-1}} \|y'(x) - (c_0 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1})\|_{C_{[0.5,1]}} \ / \ (1 + \delta_n)\ .$$

Полиномы $y'_n\ ,\ n = 1, \ldots, 12$ (32) — "хорошая" аппроксимация полиномов наилучшего приближения функции $y'(x)$ (29) в пространстве $C_{[0.5,1]}$.

14. Сравнение процедуры 1 и метода Рунге - Кутта [6]

Погрешность решения задачи Коши (27)

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5$$

по стандартной формуле метода Рунге - Кутта [6], где число узлов $q = 5$ и $q = 50$, [6] (с. 105) принимает значения

$$q = 50 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,50} |y(0.5 + i/100) - y_h(0.5 + i/100)| = 4 \cdot 10^{-9} \ ,$$

$$q = 5 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,5} |y(0.5 + i/10) - y_h(0.5 + i/10)| = 4 \cdot 10^{-5} \ .$$

Следовательно. Из этих тождеств и погрешности решения этой задачи Коши APLAN - процедурой 1

$$\{\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}\}_{n=1}^{10} = \{0.18, \ 0.069, \ 0.009, \ 0.0012, \ 0.00019,$$

$$3.6 \cdot 10^{-5}, \ 5.7 \cdot 10^{-6}, \ 9.2 \cdot 10^{-7}, \ 1.6 \cdot 10^{-7}, \ 7.3 \cdot 10^{-8}\}$$

следует утверждение.

Вывод 9. *Погрешность решения задачи Коши (27)*

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5$$

по стандартной формуле метода Рунге - Кутта [6], где число узлов $q = 5$ *и* $q = 50$ *, [6] (с. 105)*

$$q = 50 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,50} |y(0.5 + i/100) - y_h(0.5 + i/100)| = 4 \cdot 10^{-9} \ ,$$

$$q = 5 \ \rightarrow \ \max_{i=0,\ldots,5} |y(0.5 + i/10) - y_h(0.5 + i/10)| = 4 \cdot 10^{-5}$$

больше погрешности решения этой задачи Коши APLAN - процедурой 1, где параметр $n = 13$ *и* 6 *, соответственно.*

$$\|y - y_6\|_{C_{[0.5,1]}} = 3.6 \cdot 10^{-5} \, ,$$

$$\|y - y_{13}\|_{C_{[0.5,1}} \approx 3 \cdot 10^{-9} \ .$$

Из этих тождеств и классических оценок погрешности метода Рунге - Кутта [6] следует утверждение.

Вывод 10. *Если число узлов* q *метода Рунге - Кутта [6] (с. 105) растет, то погрешность решения задачи Коши (27)*

$$y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \ , \quad y(0.5) = -8/5$$

по этому методу [6] (с. 107) убывает как полином.

$$\max_{i=0,\ldots,q} |y(0.5 + i/(2 \cdot q)) - y_h(0.5 + i/(2 \cdot q))| = O(1/q^4) \ .$$

Если параметр n *входа (28) APLAN - процедуры 1 — порядок полинома (32)*

$$y_n = procedure_D_6(\ (\ \texttt{D_1 := dif(y , 1); } \ldots, \ n\ )\ (28)\ )$$

растет, то погрешность решения задачи Коши (27) APLAN - процедурой 1 убывает более быстро, чем полином.

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}} \approx Const \cdot 0.18^n \ .$$

15. Сравнение APLAN - процедуры 1 и метода

$$P_q[y_h] = P_q[\ method_[6](\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ]\,.$$

Согласно методу $P_q[y_h]$ задачу Коши $F[y] = 0$, в частности задачу Коши (27), по сеточному методу [6] преобразуют в сеточную функцию

$$y_h\ =\ method_[6](\ F[y] = 0\,,\ [a,b]\,,\ q\ )\ ,\quad h = (b-a)/q\ ,$$

и интерполируют эту функцию алгебраическим полиномом порядка q .

В пространстве $C_{[a,b]}$ норма погрешности метода $P_q[y_h]$ не меньше погрешности сеточного метода [6] (вычисления сеточного решения y_h).

Погрешность решения задачи Коши (27)

$$(\ F[y] = 0\ )\ =\ (\ y' = x\cdot(x+2)\cdot y^3 + (x+3)\cdot y^2\,,\ y(0.5) = -8/5\ )$$

по стандартной формуле метода Рунге - Кутта принимает значения [6] (с. 105)

$$q = 50\ \to\ \max_{i=0,\dots,50} |y(0.5+i/100) - y_h(0.5+i/100)| = 4\cdot 10^{-9}\ ,$$

$$q = 5\ \to\ \max_{i=0,\dots,5} |y(0.5+i/10) - y_h(0.5+i/10)| = 4\cdot 10^{-5}\ .$$

Из этих тождеств, вывода 2 и тождеств (30) следует утверждение.

Вывод 11. *В пространстве* $C_{[0.5,1]}$ $\|y - P_n[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; |a_{n+1}(y,[0.5,1])|$ *— главная часть коэффициента оптимальности*

$$\|y - P_n[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} \;/\; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| \; y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n) \; \|_{C_{[0.5,1]}}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (27) в ее решение

$$solve(\; F[y] = 0 \;) \;=\; y(x) = -2/(x \cdot (x+2)) \;=$$

$$solve(\; y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 \,,\; y(0.5) = -8/5 \;)$$

преобразованием задачи Коши (27) по методу

$$P_n[y_h] = P_n[\; method_[6](\; F[y] = 0 \,,\; [a,b] \,,\; n \;) \;] \,.$$

принимает значения

$$\|y - P_5[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_6(y,[0.5,1])| \geq 4 \cdot 10^{-5} \;\; / \;\; 7.2 \cdot 10^{-5} \;\approx\; 0.5 \,,$$

$$\|y - P_{50}[y_h]\|_{C_{[0.5,1]}} / |a_{51}(y,[0.5,1])| \geq 4 \cdot 10^{-9} \;\; / \; (\; 10^{-8} \cdot 0.18^{40} \;) \;\approx\; 0.4 \cdot 5^{40} \approx \; 4 \cdot 10^{30} \,.$$

Из этих тождеств и выводов 6, 7 следует утверждение.

Вывод 12. *Метод* $P_q[u_h]$ *преобразования задачи Коши (27)*

$$(F[y] = 0) = (y' = x \cdot (x+2) \cdot y^3 + (x+3) \cdot y^2 , \quad y(0.5) = -8/5)$$

в алгебраический полином порядка q *менее эффективен, чем процедура 1 согласно следующему критерию.*

Критерий 1 *эффективности метода преобразования уравнения*

$$F[y] = 0 , \quad solve(F[y] = 0 , y = ?) = y(x) , \quad x \in [a,b] , \quad y(x) \in X ,$$

где пространство $X = C_{[a,b]}, L_2(a,b;\rho), \ldots ,$ *в алгебраический полином*

$$y_n = method(F[y] = 0 , [a,b] , n) = c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_n \cdot x^n .$$

Пространство X *определяет критерий точности математической модели.*

Коэффициент оптимальности в пространстве X

$$\|y - y_n\|_X \; / \; \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)\|_X$$ *аппроксимации*

преобразования (функции) $y(x) = solve(F[y] = 0 , y = ?) , x \in [a,b]$

преобразованием (полиномом) $y_n = method(F[y] = 0 , [a,b] , n) .$

16. Структура выхода операторов APLAN - процедуры 1

Выход оператора

```
y1_n := d_x( y_n ) ;  —  q * n * x ^ (n -1) + ···
```

— APLAN - эквивалент для полинома $y'_{n,s-1} = c_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \cdots$.

Выход оператора

```
y2_n := d_x( y1_n ) ;  —  q * n * ( n -1 ) * x ^ (n - 2) + ···
```

— APLAN - эквивалент для полинома $y''_{n,s-1} = c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \cdots$.

Выход оператора

```
f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;
```

— APLAN - эквивалент функции (8) $f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$.

Выход оператора `F_s := Cheb( f_s , intefval , n ) ;`

— APLAN - эквивалент полинома (9) $F_s = U_n[f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})]$.

Выход оператора `LDUMK := ( DO + F_s = 0 ) ;` — ЛДУМК

`A * dif(y , k) + B * dif(y , k-1) + ⋯ + C * y + G + F_s = 0 ;`

— APLAN - эквивалент ЛДУМК (22)

$$A(x) \cdot y^{(k)}(x) + B(x) \cdot y^{(k-1)}(x) + \cdots + C(x) \cdot y(x) + G(x) + F_s = 0\,.$$

Выход оператора

`y_n := procedure_D_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);`

— полином

$$\texttt{c(n) * x ^ n } + \cdots + \texttt{ c(1) * x + c(0)}\,,$$

где `x` — атом и коэффициенты `c( 0 ),...,c( n )` — числа,

— APLAN - эквивалент для полинома (7), (9), (21)

$$y_{n,s} = c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n =$$

$$= method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\,.$$

17. Эффективность APLAN - процедуры 1

Теорема 1. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (24)*

(DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n)

имеет APLAN - эквивалент для:
— оператора $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$, *полинома* $y_{n,s-1}$, *условий (4) и* $n = k + p$, *где* $p \in N$, *и пусть значения функции* $f(x, y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(k-1)})$ *вычисляются алгебраическими преобразованиями. Тогда:*

1. Преобразование

$y_{n,s} = procedure_D_6($ DO, f, y_n, init_cond, InitPoint, interval, n)

— алгебраическое.

2. Для сложности этого преобразования справедливо тождество

$$Q(\, procedure_D_6(\ \texttt{DO, f , y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ )\,) = O(n^2) + Q(\, procedure_D_1(\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\, init_cond(y,\, d)\,,\, [a, b]\,,\, n\,)\,).$$

Доказательство. Оператор на языке APLAN процедуры 1 d_x мы построим и исследуем в следующих лекциях.

Выше мы рассмотрели выходы операторов процедуры $procedure_D_6$ в процессе преобразования входа (24). Эти выходы доказывают.

Процедура 1 преобразует вход (24).

Операторы процедуры $procedure_D_6$ — запись на языке APLAN конечного числа правил преобразования и конечной стратегии применения этих правил. Следовательно. Эти операторы выполняют алгебраические преобразования.

Если значения функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ вычисляются алгебраическими преобразованиями, то интерполирование — алгебраическое преобразование.

APLAN - процедура 1 — линейная. Следовательно.

1. Преобразование процедурой 1 входа (24) — алгебраическое + интерполирование.
2. Вычислительная сложность APLAN - процедуры 1 тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры.

Оператор d_x дифференцирует алгебраический полином порядка n вида (2). Следовательно. Сложность этого преобразования

$$Q(d_x(y_n)) = O(n)\,.$$

Сложность подстановки полиномов порядка n в полином f

```
f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;
```

растет с ростом n и скорость этого роста не выше $O(n)$.

Сложность интерполирования (9)

$$F_s = U_n[f_s] = f_s(x_0) \cdot L_0(x) + \cdots + f_s(x_n) \cdot L_n(x)\,,$$

$$x_i = a + (b-a) \cdot (1 - \cos(i \cdot \pi/n))/2\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

где фундаментальные полиномы $L_i(x)$ порядка n известны, растет с ростом n и скорость этого роста $O(n^2)$.

Сложность преобразования

```
LDUMK := ( DO + F_s = 0 );
```

не зависит от n.

Сумма приведенных выше оценок вычислительной сложности преобразования операторами APLAN - процедуры 1 тождественна доказываемой оценке.

18. APLAN - процедура 1 и алгоритм 1

Теорема 2. *Пусть вход APLAN - процедуры 1 (24)*

(`DO , f , y_n , init_cond , InitPoint , interval , n`)

эквивалентен входу алгоритма 1

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет APLAN - эквивалент для:
— оператора $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$, *полинома* $y_{n,s-1}$,
— условий (4)
и имеет рациональные константы и $n = k + p$, *где* $p \in N$
и пусть интерполирование (9) алгоритма 1 выполняет оператор процедуры 1 и интерполяционный полином F_s *(9) имеет рациональные коэффициенты.*

Тогда справедливо тождество

$$y_{n,s} = procedure_D_6(\ \texttt{DO, f, y_n, init_cond, InitPoint, interval, n}\ ) =$$
$$algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.
APLAN - процедура 1 имеет алгебраические преобразования и интерполирование.

Если операнды арифметической операции — рациональные или целые числа, то система APS выполняют эту операцию в арифметике рациональных или целых чисел и вычисляет результат без погрешностей. Следовательно.

Если операнды алгебраического преобразования имеют рациональные (целые) константы, то система APS выполняет это преобразование без погрешностей.

Вход (24) APLAN - процедуры 1 — APLAN - эквивалент входа алгоритма 1

$$algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Следовательно. Операторы APLAN - процедуры 1

```
y1_n := d_x( y_n ) ;                                  /*  y'_n  */
y2_n := d_x( y1_n ) ;                                 /*  y''_n  */
                                  ...
yk_n := d_x( yl_n ) ;                               /*  y^(k)_n  */
f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;
```

преобразуют вход (24) в APLAN - эквивалент функции (8) $f(x, y_{n,s-1}, \ldots y_{n,s-1}^{(k-1)})$ точно — не добавляют в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

По условию теоремы. Интерполирование (9) выполняет оператор процедуры 1

```
F_s := Cheb( f_s , intefval , n ) ;          /* U_n[f_s] */
```

и интерполяционный полином F_s (9) имеет рациональные коэффициенты.

Следовательно. Операторы APLAN - процедуры 1

```
LDUMK := ( DO + F_s = 0 ) ;
y_n := procedure_D_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);
```

преобразуют вход (24) и полином F_s (9) в APLAN - эквивалент полинома (21)

$$algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

точно — не добавляют в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

19. Эффективность алгоритма 1

APLAN - процедура 1 — запись алгоритма 1 на языке APLAN системы APS. Следовательно. Процедура 1 и теоремы 1, 2 доказывают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вход алгоритма 1*

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— функцию $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$,
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$ *и*
$n = k + p$, *где* $p \in N$, *и пусть значения функции* $f(x, y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(k-1)})$ *вычисляются алгебраическими преобразованиями. Тогда:*

1. Преобразование (21) — алгебраическое.

$$y_{n,s} = algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

2. С ростом n *сложность преобразования (21) растет как полином.*

Теорема 4. *Пусть вход алгоритма 1*

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— функцию $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$,
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$,
и имеет рациональные константы и $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда СКА преобразует эквивалент для входа алгоритма 1 в эквивалент для полинома (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

точно — не добавляет в результат преобразований погрешности от округления результатов арифметических операций над действительными числами.

Исключение — интерполирование (9).

20. Алгоритм 1 и метод 1

Лемма 1. *Пусть вход алгоритма 1*

$$y_{n,s} = algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

имеет:
— оператор $A \cdot y^{(k)} + D[y] + G$ *уравнения (3) порядка* k,
— функцию $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ *уравнения (3),*
— полином $y_{n,s-1}$ *— приближение метода 1,*
— условия (4) $init_cond(y,\ d)$,
и имеет $n = k + p$, *где* $p \in N$.

Тогда результат преобразования этого входа по алгоритму 1 — полином (21)

$$y_{n,s} = algorithm_D_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f\,,\ y_{n,s-1}\,,\ init_cond(y,\ d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

существует тогда и только тогда, когда существует полином (7) метода 1

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

где $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$, *и эти полиномы тождественны.*

Доказательство. Функция (8)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}),$$

и алгебраический полином $F_s = U_n[f_s]$ (9) метода 1 и алгоритма 1 тождественны по определению метода 1 и алгоритма 1.

Следовательно. Тождественны ЛДУМК

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0$$

преобразования (7) и ЛДУМК (22).

Следовательно. Согласно лемме 3.3.

Алгебраический полином (7)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ),$$

— результат преобразования ЛДУМК (22) и условий (4) —
существует тогда и только тогда, когда существует алгебраический полином (23)

$$y_{n,s} = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + F_s = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ ),$$

— результат преобразования 3 алгоритма 1 ЛДУМК (22) и условий (4) —
и эти полиномы тождественны.

21. Метод 1 и проекционный метод 1

Теорема 5. *Метод 1*

$$y_n = method_D_6(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,,$$

где $$y_{n,0} = Y_0 + Y_1\cdot(x-d) + \dots + Y_{k-1}\cdot(x-d)^{k-1}/(k-1)!\,,$$

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

где $$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \dots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

(5) — (11) решения задачи Коши для ЛДУМК дополненного нелинейностью $f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})$ *— функцией (3), (4)*

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\,,\quad init_cond(y,d)\,,$$

есть алгебраический эквивалент для преобразования этой задачи Коши (3), (4) в ЛИУМК Вольтерра дополненное нелинейностью — функцией (12)

$$A\cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,$$

где $$V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g = G + D[P_{k-1}]\,,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,,$$

и решения интегрального уравнения (12) по проекционному методу 1

$$u_p = G_method_I_6(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}\,,$$

где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1, 2, \ldots$

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\,A \cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + U_n[f_s]\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$$

(14) – (19).

Справедливы следующие утверждения.

1. Если значения функции $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$ (8) *вычисляются алгебраическими преобразованиями, то преобразование*

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )$$

(7) одной итерации метода 1 (5) — алгебраическое.

2. Алгебраический полином (7)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,,$$

$s = 1, 2, \ldots$ *(результат преобразования одной итерации метода 1) существует тогда и только тогда, когда существует полином* (15)

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A{\cdot}(u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?){+}D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]]{+}g{+}U_n[f_s]\ ] = 0\ )\,,$$

где $f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$

(результат преобразования ЛИУМК (17) эквивалентного ЛДУМК (22) и условиям (4) по проекционному методу с оператором (18)) и для этих полиномов справедливо тождество

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{k-1}\,. \tag{33}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.

Для задачи Коши для ЛДУМК дополненного нелинейностью — функцией (3), (4). Преобразование (7) метода 1 тождественно преобразованию (23)

$$y_{n,s} = algorithm_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )\,.$$

Если значения функции $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$ (8) вычисляются алгебраическими преобразованиями, то, согласно теореме 3, преобразование (23) — алгебраическое. Следовательно. *Преобразование (7) метода 1 — алгебраическое.*

Для начальных приближений проекционного метода 1 $u_{p,0} = 0$ и метода 1

$$y_{n,0} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1} = P_{k-1}$$

справедливо тождество (33) $y_{n,0} = V^k[u_{p,0}] + P_{k-1}\,.$

Если для полиномов $y_{n,s-1}$ и $u_{p,s-1}$ справедливо тождество (33)

$$y_{n,s-1} = V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}\,,$$

то тождественны результаты их преобразования — функции (8) и (16)

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$$

$$f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)})) .$$

Следовательно.

Для ЛИУМК (15) и ЛДУМК (22) справедливо тождество (17)

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g + U_n[f_s] = 0)$$
$$= subs(y = V^k[u] + P_{k-1},\ (A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0) .$$

Следовательно. Согласно теореме 3.5. Алгебраический полином $y_{n,s} =$

$$method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ n\ )$$

(результат преобразования по методу 1 этого ЛДУМК и условий (4))
существует тогда и только тогда, когда существует полином (15) $u_{p,s} =$

$$solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?]] + g + U_n[f_s]\ ] = 0)$$

— результат преобразования по проекционному методу ЛИУМК (17)

$$(A \cdot u + D[V^k[u]] + g + U_n[f_s] = 0)$$

и для этих полиномов для $s = 1, 2, \ldots$ справедливо тождество (33)

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{k-1} .$$

22. Класс $D_{6,X}$ задач Коши для уравнений типа D_6

1. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3) в приложении к проекционному методу (15) $u_{p,s} = solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g + U_n[f_s]\ ] = 0\ )$ решения ЛИУМК (17) — преобразования задачи Коши для ЛДУМК (22)

$$(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g + U_n[f_s] = 0\ ) =$$

$$subs(\ y = D[V^k[u]] + P_{k-1}\,,\ (\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\ )\ )\,,$$

где $\quad u = y^{(k)}\,, \quad V[u] = \int_d^x u(t)\,dt\,, \quad g = G + D[P_{k-1}]\,,$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x-d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x-d)^{k-1}\,.$$

2. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора (18)

$$S_p[f] = a_0(f,[a,b]) \cdot T_0(z) + \cdots + a_p(f,[a,b]) \cdot T_p(z)\ :\ L_2(a,b;\rho) \to L_2^p(a,b;\rho)$$

в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
Доказывают следующее утверждение.

Вывод 13. *Проекционный метод 1*

$$u_p = G_method_I_6(\ A\cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x,(V^k[u]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u]+P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a,b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}$$

(14), где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1,\ 2,\dots$ *полином* $u_{p,s}$ *вычисляет проекционный метод (15) – (19) (эквивалент для преобразования (7))*

$$u_{p,s} = solve(\ S_p[\,A\cdot u_p + D[V^k[\,u_p\,]] + g + U_n[f_s]\,] = 0\,,\ u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?\ )\,,$$

$$f_s = f(x,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1}),\dots,(V^k[u_{p,s-1}]+P_{k-1})^{(k-1)}))\,,$$

и пространство $X = L_2(a,b;\rho),\ C_{[a,b]},\ \dots$ *функций* $y(x)\ ,\ x\in[a,b]$ *определяют класс* $D_{6,X}$ *задач Коши для ЛДУМК дополненных нелинейностью – функцией (3), (4) (типа* D_6 *)*

$$A\cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x,y,y',\dots,y^{(k-1)}) = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ .$$

В пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности*

$$\|u-u_p\|_X\ /\ \inf_{c_0,\dots,c_p}\|u(x)-(c_0+\dots+c_p\cdot x^p)\|_X \tag{34}$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (3), (4) класса $D_{6,X}$ *в производную порядка* k *решения этой задачи* $u = y^{(k)} =$

$$(\ solve(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \, , \ init_cond(y, d) \, , \ y = ? \ ) \ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши в интегральное уравнение (12)

$$(\, A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0 \,) =$$

$$subs(\, y = V^k[u] + P_{k-1} \, , \ (\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \,) \,) \, ,$$

где

$$u = y^{(k)} = ? \, , \quad V[u] = \int_d^x u(t) \, dt \, , \quad g = G + D[P_{k-1}] \, ,$$

$$P_{k-1} = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \cdots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x - d)^{k-1} \, ,$$

и решением этого интегрального уравнения по проекционному методу 1.

$$u_p = G_method_I_6(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0 \, , \ [a, b] \, , \ p \ ) \ = \ \lim_{s \to \infty} u_{p,s} \, .$$

Классы $D_{6,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{6,C_{[a,b]}}$ *задач Коши (3), (4) представительны.*

23. Эффективность метода 1

Следствие 1. *Пусть вход метода 1*

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \ , \ init_cond(y, d) \ , \ [a, b] \ , \ n \ )$$

имеет ЛДУМК дополненное нелинейностью — функцией (3), условия (4) и $n = p + k$ *, где* $p \in N$ *, и пусть пространство* $X = C_{[a,b]}, \ L_2(a, b; \rho), \ \ldots$.

Тогда в пространстве X *коэффициент оптимальности*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_n} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \cdots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X \qquad (35)$$

аппроксимации преобразования задачи Коши (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи* $y^{(k)} = (\ solve$

$$(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \ , \ init_cond(y, d) \ , \ y =? \ ) \ )^{(k)}$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 $y_n =$

$$method_D_6(A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \, , \, init_cond(y, d) \, , \, [a, b] \, , \, n \,)$$

и дифференцированием тождественен коэффициенту оптимальности (34)

$$\|u - u_p\|_X \ / \ \inf_{c_0,\ldots,c_p} \|u(x) - (c_0 + \cdots + c_p \cdot x^p)\|_X$$

аппроксимации преобразования интегрального уравнения (12) (эквивалентного задаче Коши (3), (4)) в его решение $u = solve($

$$A \cdot u + D[V^k[u]] + g + f(x, V^k[u] + P_{k-1}, \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ u = ?\ )$$

преобразованием этого интегрального уравнения по проекционному методу 1

$$u_p = G_method_I_6(\ A \cdot u + D[V^k[u]] + g\ +$$

$$f(x, (V^k[u] + P_{k-1}), \ldots, (V^k[u] + P_{k-1})^{(k-1)}) = 0\,,\ [a, b]\,,\ p\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} u_{p,s}$$

(14), где $u_{p,0} = 0$ *и для* $s = 1,\ 2, \ldots$ *полином* $u_{p,s}$ *вычисляет эквивалент (15) для преобразования (9)* $u_{p,s} =$

$solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a, b; \rho) = ?]] + g + U_n[f_s]\ ] = 0\ )\,,$

где $f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))\,.$

Доказательство. Согласно теореме 5. Для полиномов (7)

$$y_{n,s} = method_D_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\ ,\ init_cond(y,d)\ ,\ [a,b]\ ,\ n\ ),$$

где $f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})$, и (15) $u_{p,s} =$

$$solve(\ S_p[\ A \cdot (u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?) + D[V^k[u_p \in L_2^p(a,b;\rho) = ?]] + g + U_n[f_s]\ ] = 0\ ),$$

где $f_s = f(x, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1}), (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})', \ldots, (V^k[u_{p,s-1}] + P_{k-1})^{(k-1)}))$, справедливо тождество (33)

$$y_{n,s} = V^k[u_{p,s}] + P_{p-1}\ ,\quad s = 1, 2, \ldots, .$$

Следовательно. Справедливо тождество $y^{(k)}_{n,s} = u_{p,s}\ ,\quad s = 1, 2, \ldots, .$

Последовательность полиномов (7) $y_{n,s}\ ,\quad s = 1, 2, \ldots,$ имеет предел y_n (5) тогда и только тогда, когда последовательность полиномов $u_{p,s}\ ,\quad s = 1, 2, \ldots,$ (15) имеет предел u_p и справедливо тождество $y^{(k)}_n = u_p\,.$

Согласно определению уравнения (12), справедливо тождество (13) $y^{(k)} = u\,.$

Следовательно. Тождественны коэффициенты оптимальности (34) и (35).

24. Коэффициент оптимальности метода 1

Следствие 1 и вывод 13 доказывают следующее утверждение.

Вывод 14. *Пусть пространство* $X = L_2(a, b; \rho)$, $C_{[a,b]}$, ... *и пусть задача Коши (3), (4) принадлежит к классу* $D_{6,X}$.

Тогда в пространстве X *ограничен коэффициент оптимальности (35)*

$$\|y^{(k)} - y_n^{(k)}\|_X \ / \ \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y^{(k)}(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)^{(k)}\|_X$$

аппроксимации преобразования этой задачи Коши (3), (4) в производную порядка k *решения этой задачи*

$$y = solve(\, A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ y = ?\,)$$

преобразованием этой задачи Коши по методу 1 $y_n =$

$$method_D_6(\, A{\cdot}y^{(k)}{+}D[y]{+}G{+}f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\,)$$

и дифференцированием $y_n^{(k)} = (d/dx)^k y_n$.

Класс $D_{6,X}$ *определяет проекционный метод (15).*

Классы $D_{6,L_2(a,b;\rho)}$ *и* $D_{6,C_{[a,b]}}$ *задач Коши (3), (4) представительны.*

25. Метод 1 и сеточные методы [6]

$$y_h = s_method(\ y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ [a, b]\ ,\ q\ ) \qquad (36)$$

По сеточным методам [6] на отрезке $[a, b] = [d, b]$ решают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений разрешенных относительно старшей производной

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\quad init_cond(y, d)\ .$$

Результат решения задачи Коши по сеточному методу [6] — сеточная функция y_h , $h = (b - a)/q$ (36) — аппроксимирует значения функции — решения задачи

$$y(x) = solve(y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ y = ?\ )$$

в узлах сетки $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ \ldots,\ x_q = b$, — $y_h(x_i) \approx y(x_i)$.

Если функция $y(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $r \geq p$ — $y(x) \in C^r_{[a,b]}$ и число узлов q сетки метода (36) растет, то погрешность этой аппроксимации убывает [6]

$$\|y(x) - s_method(\ y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\ ,\ init_cond(y, d)\ ,\ q\ )\|_{C_q} =$$

$$\max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(h^p)\,, \quad \text{где} \quad p \le 6\,.$$

Если функция $y = y(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную порядка r , то в пространстве $C_{[a,b]}$ для величины наилучшего приближения этой функции алгебраическими полиномами порядка n справедливо тождество

$$y \in C^r_{[a,b]} \;\to\; E_{n,C_{[a,b]}}[y] = \inf_{c_0,\dots,c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}} = O(n^{-r}) \;\; [3].$$

Из этих тождеств и вывода 14 следует утверждение.

Вывод 15. *Пусть задача Коши — система из уравнения*

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

и условий $init_cond(y,d)$ *(4) принадлежит к классу* $D_{6,C_{[a,b]}}$, *где* $a = d$, *и пусть решение* $y(x)$ *этой задачи имеет производную порядка* $7 + k$.

Тогда справедливо тождество

$$\|(y(x) - method_D_6(\, y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})\,,\, init_cond(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,))^{(k)}\|_{C_{[a,b]}}$$

$$=$$

$$o(\|y(x) - s_method(\, y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})\,,\, init_cond(y,d)\,,\, [a,b]\,,\, n\,)\|_{C_n})\,.$$

Заключение

1. Теоремы 1 — 5 и следствие 1.
2. Теоремы сходимости проекционных методов решения операторных уравнений [4] (глава 3).
3. Классические оценки аппроксимационных характеристик оператора S_n (18) в пространствах $L_2(a,b;\rho)$ и $C_{[a,b]}$ [5] (с. 53, 71, 77, 84).
4. Выводы 1 — 15.

Доказывают следующее утверждение.

Вывод 16. *Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 — эффективные инструментальные средства для исследования в СКА математических моделей. Эти модели включают задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами (ЛДУМК) дополненного нелинейностью — функцией (3), (4).*

$$A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0 \ , \ init_cond(y, d) \ .$$

Метод 1, алгоритм 1 и APLAN - процедура 1 обеспечивают высокую точность моделирования.

Дополнение

Метод 1'. Модификация метода 1.

$$y_n = method_D_6'(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) = 0\,,$$

$$init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ =\ \lim_{s\to\infty} y_{n,s}\,,$$

где

$$y_{n,0} = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \cdots + Y_{k-1} \cdot (x - d)^{k-1}/(k-1)!\,,$$

и для $s = 1, 2, \ldots$

$$y_{n,s} = method_D_1'(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\,)\,,$$

где

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,.$$

Метод $method_D_1'$ рассмотрен в лекции 3.

Алгоритм 1'. Модификация алгоритма 1.

$$y_{n,s} = algorithm_D'_6(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})\,,\ y_{n,s-1}\,,$$

$$init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )\ =$$

$$($$

$$f_s = f(x, y_{n,s-1}, y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1})\,,$$

$$F_s = U_n[f_s]\,,$$

$$(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G\,,\ U_n[f_s]\ )\ \rightarrow\ (\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\ )\,,$$

$$y_{n,s} = algorithm_D'_1(\ A \cdot y^{(k)} + D[y] + G + U_n[f_s] = 0\,,\ init_cond(y, d)\,,\ [a, b]\,,\ n\ )$$

$$)\,.$$

Алгоритм $algorithm_D'_1$ рассмотрен в лекции 3.

APLAN - процедура 1'. Модификация APLAN - процедуры 1.

```
   y1_n := d_x( y_n ) ;                              /*  y'_n  */

   y2_n := d_x( y1_n ) ;                             /*  y''_n  */
                                  ...
   yk_n := d_x( yl_n ) ;                           /*  y^(k)_n  */

   f_s := subs( y = y_n , y1 = y1_n , ... , yk = yk_n , f ) ;

   F_s := Cheb( f_s , intefval , n ) ;              /* U_n[f_s] */

   LDUMK := ( DO + F_s = 0 ) ;
```

```
y_n := procedure_D'_1(LDUMK, init_cond, InitPoint, interval, n);
```

APLAN - процедура `procedure_D'_1` рассмотрена в лекции 3.

Литература

1. Letichevsky A.A., Kapitonova J.V., Konosenko S.V. *Computations in APS.* // Theoretical Computer Sciens 119 (1993). — P. 145 – 171.

2. Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка. — 1988. — 304 с.

3. Ланцош К. *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз. — 1961. — 524 с.

4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука. — 1969. — 456 с.

5. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука. — 1983. — 384 с.

6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* — М.: Мир. — 1969. — 368 с.

УДК 518.3 / 681.142.2

П. Н. Денисенко

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО τ- МЕТОДУ ЛАНЦОША

Учебное пособие по курсу

Функциональное и логическое программирование

Заключение

Результаты исследования построенных в работе APLAN - процедур системы алгебраического программирования APS доказывают следующие утверждения.

Вывод 1. *Построенные в работе APLAN - процедуры — эффективные средства для исследования в системе алгебраического программирования математических моделей с высокой точностью. Эти математические модели включают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений широкого класса.*

Вывод 2. *APLAN - процедура для решения задачи Коши для ЛДУМК*

$$procedure_D_1(\ A\cdot y^{(k)}+D[y]+G=0\,,\ init_cond(y,d)\,,\ [a,b]\,,\ n\ )=c_0+\cdots+c_n\cdot x^n$$

(линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами) и метод конструирования на ее основании APLAN - процедур для решения задачи Коши для дифференциальных уравнений других типов являются эффективными средствами создания процедур системы алгебраического программирования APS и других систем символьных вычислений на компьютерах для решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения дополненного нелинейностью $f(x,y,y',\ldots,y^{(k-1)})$ *— алгебраическим полиномом или фукцией. Коэффициенты этого уравнения — полиномы функций – решений задач Коши для ЛДУМК и* x *.*